Matematik
Chalmers tekniska högskola 2013-12-19

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jacob Leander, telefon 0703-088304 Plats och tid: V, e.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (5p)

(b) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$ och vilken dimension har nollrummet $\text{Nul}\,\boldsymbol{A}$ till matrisen (motivera ditt svar)? (2p)

(c) Ange en vektor i $\mathbb{R}^3$ som *inte* tillhör kolonnrummet $\text{Col}\,\boldsymbol{A}$ (motivera ditt svar). (3p)

(a) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. x_3 fri, låt $x_3 = t$, vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 - 8t \\ 4 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) 2 pivotkolonner $\Rightarrow$ rang 2. Dimensionen på nollrummet är 1 (antalet kolonner i matrisen minus rangen).

(c) En vektor som inte kan skrivas som en linjärkombination av pivotkolonnvektorerna i $\boldsymbol{A}$, tex $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

---

2 (a) Bestäm B så att $B^2 \int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x)dx = 1$ (3p)

(b) Beräkna $\int \sin(\sqrt{x})dx$. (Använd variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$) (4p)

(c) Visa att (4p)

$$\int_0^1 \tan(\sqrt{x})dx \leq \frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \tan(1)}{2}$$

(använd lämplig rektangelregel).

(a) $\int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x)dx = \int_0^2 \frac{1+\cos(\pi)}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^2 = 1$. Vi får $B^2 = 1$, dvs $B = \pm 1$

(b) $\int \sin(\sqrt{x})dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2, dx = 2tdt \end{array}\right] = \int 2t\sin(t)dt = [P.I.]$
$= -2t\cos(t) + \int 2\sin(t)dt = 2t\sin(t) + 2\cos(t) + C = 2\sin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C$

(c) H.L. är höger rektangelregel för integranden på intervallet $0 \leq x \leq 1$. $\tan(\sqrt{x})$ växer på intervallet, därför blir H.L. en översumma, och därmed gäller olikheten.

---

3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = 5 \ , \ 1 \leq x \leq 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(b) Använd Euler's (framåt) metod och beräkna en approximation till begynnelsevärdesproblemet i (a)-uppgiften. Tag steglängden $h = 1$. (3p)

(a) Med integrerande faktorn x får vi $y(x)x = \int 5xdx = \frac{5}{2}x^2 + C$.
Dvs $y(x) = \frac{1}{x}(\frac{5}{2}x^2 + C) = \frac{5}{2}x + \frac{C}{x}$.
$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} + C = 1$ dvs $C = -\frac{3}{2}$. Vi får $y(x) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2x}$

(b) $y' + \frac{1}{x}y = 5 \Leftrightarrow y' = 5 - \frac{1}{x}y$
Steglängd $h = 1 \Rightarrow x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$
$y_0 = 1$
$y_1 = y_0 + h(5 - \frac{1}{x_0}y_0) = 1 + (5-1) = 5$
$y_2 = y_1 + h(5 - \frac{1}{x_1}y_1) = 5 + (5 - \frac{1}{2}5) = \frac{15}{2}$

---

4 (a) Låt (4p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu} & e^{-\mu} \end{bmatrix}$$

där $\mu \in \mathbb{R}$. För vilka värden på μ är $\mathbf{A}$ inverterbar?

(b) Låt $\mu \in \mathbb{R}$. Betrakta (5p)

$$\begin{cases} y''(x) - \mu^2 y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Visa att, om $\mu > 0$, så har differentialekvationen bara den triviala lösningen $y(x) = 0$.

(c) Låt $\mu \neq 0$. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen (2p)

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = x$$

(a) För alla $\mu \neq 0$ ty $det(\boldsymbol{A}) = e^{-\mu} - e^{\mu} = \dfrac{1 - e^{2\mu}}{e^{\mu}} \neq 0$ om $\mu \neq 0$

(b) Karakteristisk ekvation $r^2 - \mu^2 = 0$, dvs $r = \pm\mu$, vilket ger $y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. $y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$ och $y(1) = 0 \Rightarrow Ae^{\mu} + Be^{-\mu} = 0$ Vi får $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu} & e^{-\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som bara har lösningarna $A = B = 0$ (se (a) ovan). Dvs $y(x) = 0$ är den enda lösningen till diffekvationen.

(c) Polynomreceptet, ansätt $y_p = Ax + B$, dvs $y_p' = A, y_p'' = 0$. Vi får $y_p'' - \mu^2 y_p = -\mu^2(Ax + B) = x$. Identifiering ger $B = 0$ och $A = -\frac{1}{\mu^2}$, dvs $y_p = -\frac{1}{\mu^2}x$

---

5 Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildning (rotation) med standardmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna determinanten för $\boldsymbol{A}$. (2p)

(b) Låt $v = \frac{\pi}{4}$. Beräkna bilden av triangeln vars hörnpunkter ges av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3p)

(c) Är avbildningen injektiv? (Motivera ditt svar). (2p)

(d) Följande matlabsekvens roterar och skalar om en tetraeder. Vi antar att tetraederns hörnpunkter finns lagrade i matrisen `H`. (3p)

```
v=pi/4;
A=[cos(v) -sin(v) 0;sin(v) cos(v) 0;0 0 1];
S=[5 0 0;0 2 0;0 0 1];
P1=A*H; P2=S*P1;
```

Antag att volymen på ursprungstetraedern (den vars hörnpunkter finns i `H`) är 1. Vad blir volymen på den tetraeder vars hörnpunkter finns i `P2`? (Motivera ditt svar).

(a) $\det(\boldsymbol{A}) = \cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$

(b) Området vars hörn ges av kolonnerna i matrisen $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Ja den är injektiv ty $\boldsymbol{A}$ är inverterbar.

(d) $\det(\boldsymbol{S}) = 5 * 2 * 1 = 10$

Lycka till och God Jul !!

önskar Katarina