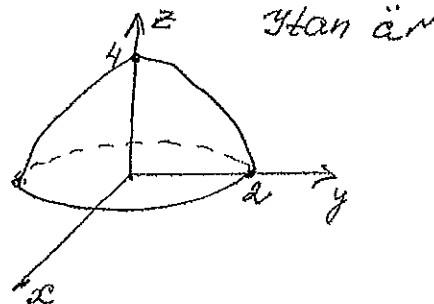
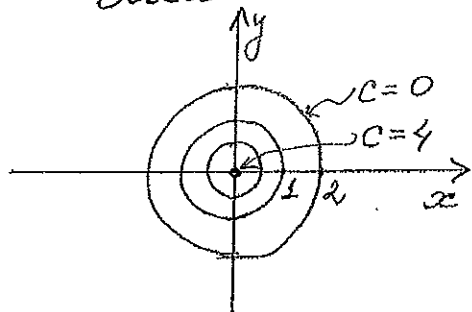


1. (a) Nivåkurvorna ges av

$$4 - x^2 - y^2 = C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 - C$$

för olika värden på konstanter C , $4 - C \geq 0$.

Dessa är cirklar med centrum i $(0,0)$ och radien $\sqrt{4-C}$.



(b) Längden av kurvan $C = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\sin' x)^2} dx =$
 $= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$, ty

en parametrisering av sinuskurvan är

$$r = r(x) = (x, \sin x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$r'(x) = (1, \sin' x) = (1, \cos x).$$

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koefficienter (κ, l) sådana att linjen
 $y = \kappa x + l$ bäst ansluter till de givna
 punkterna i minstakvadratmetodens mening
 uppfyller systemet

$$A^T A \begin{bmatrix} l \\ \kappa \end{bmatrix} = A^T b$$

(dvs minstakvadrat lösning $\begin{bmatrix} l \\ \kappa \end{bmatrix}$ till systemet

$$\begin{cases} l + \kappa \cdot 1 = 1 \\ l + \kappa \cdot 2 = 2 \\ l + \kappa \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} l \\ \kappa \end{bmatrix} = b$$

Vi har $\begin{bmatrix} l \\ \kappa \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

linjens ekvation blir alltså $y = -\frac{1}{2}x + 2$

2a) Se kursboken

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 - y^2) \cdot 2x - \sin(\pi x) \cdot \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 - y^2) \cdot (-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -2) = \cos 0 \cdot 2 \cdot 2 - \sin(2\pi) \cdot \pi = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, -2) = \cos 0 \cdot (-2 \cdot (-2)) = 4$$

(c) En ekvation för tangentplanet till ytan
 $z = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i $(2, -2, 1)$ ges av

$$z = f(2, -2) + f'_x(2, -2)(x-2) + f'_y(2, -2)(y+2) =$$

$$= 1 + 4(x-2) + 4(y+2) = 1 + 4x + 4y$$

Svar $z = 1 + 4x + 4y$

(d) $L(x, y) = 1 + 4(x-2) + 4(y+2)$ är en linjärisering
 av $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i $(2, -2)$

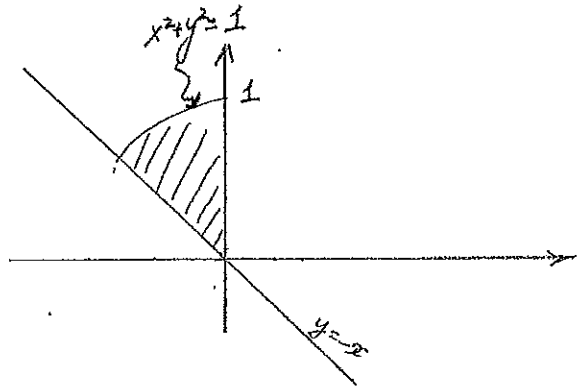
$$f(2.1, -1.8) \approx L(2.1, -1.8) =$$

$$= 1 + 4(2.1-2) + 4(-1.8+2) = 2.2$$

Svar $f(2.1, -1.8) \approx 2.2$

3a)

$$\iint_D (x^2 - y^2) dA = \left| \begin{array}{l} \text{Polära koordinater} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ 0 \leq r \leq 1, \pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/4 \end{array} \right|$$



$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \left(\int_0^1 (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) r dr \right) d\varphi =$$

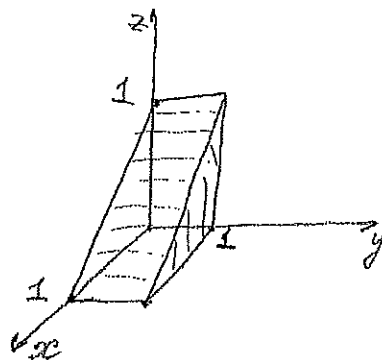
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2} \right]_{\pi/2}^{3\pi/4} =$$

$$= -\frac{1}{8}$$

38)

$$\iiint_K xy \, dV = \iint_D \left(\int_0^{1-x} xy \, dz \right) dx dy =$$

där D är projektionen av K
 på xy -planet och är
 rektangeln = kvadrat $0 \leq x \leq 1$
 $0 \leq y \leq 1$



$$= \iint_D xy(1-x) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(1-x) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (x-x^2) dx \int_0^1 y dy = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Svar: $\frac{1}{12}$

4. a) Egenvektorer till $\lambda = 6$:

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $(t, s) \neq (0, 0)$

Egenvektorer till $\lambda = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$

(b) A är symmetrisk och därmed finns
 en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av A 's egenvektorer.

Låt $B = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

en bas för
egenrummet
till $\lambda = 6$

en bas för
egenrummet
till $\lambda = 0$

v_3 är ortogonal mot v_1, v_2
 Det gäller att ortogonalisera $\{v_1, v_2\}$:

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vektorerna u_1, u_2, v_3 är en ortogonalbas i $\mathbb{R}^3$
bestående av egenvektoren till A .

$$\text{En ON-bas: } \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$5. a) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6y - 6x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^2 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

f.s kritiska punkter är $(0,0), (1,1)$.

(b) Randen till R består av fyra kurvor
 $f_1 = \gamma(t, 0) : t \in [0, 2]$, $f_2 = \gamma(0, t) : t \in [0, 2]$
 $f_3 = \gamma(t, 2) : t \in [0, 2]$, $f_4 = \gamma(2, t) : t \in [0, 2]$

På f_1 är $f(t, 0) = -2t^3$ varav $\max f = 0$
 på f_1

f_2 : $f(0, t) = -3t^2$ varav $\max f = 0$
 på f_2

$$f_3: f(t, 2) = 12t - 2t^3 - 12, \quad t \in [0, 2]$$

$$\text{Låt } g(t) = -2t^3 + 12t - 12$$

$$g'(t) = -6t^2 + 12 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \quad (-\sqrt{2} \text{ ej ligger i } [0, 2])$$

$$g(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 12 = 8\sqrt{2} - 12$$

$$\cancel{g(-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12 = -8\sqrt{2} - 12}$$

$$g(0) = -12, \quad g(2) = -4$$

$$\max_{\text{på } f_3} f = \max_{[0, 2]} g = \max \{g(\sqrt{2}), \cancel{g(-\sqrt{2})}, g(0), g(2)\} = 8\sqrt{2} - 12$$

$$f_4: f(2, t) = 12t - 16 - 3t^2, \quad t \in [0, 2]$$

$$\text{Låt } h(t) = 12t - 16 - 3t^2$$

$$h'(t) = 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$h(2) = -4, \quad h(0) = -16$$

$$\max_{\text{på } f_4} f = \max_{[0, 2]} h = -4$$

Vi har alltså att det största värde som f antar på randen är ~~$2\sqrt{2}-12$~~ 0

(c) Det största värde som f antar på R är $\max\{f(0,0), f(1,1), \text{största värdet på randen}\}$
 $\uparrow$
 f 's värde i kritiska punkter

$$= \max\{0, 1, 2\sqrt{2}-12\} = 1$$

Svar: 1

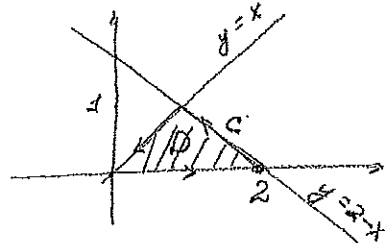
6 (a) Vi har $\frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y^2 + x^5) = 6y$
 $\frac{\partial}{\partial x}(2x - e^{y^2} + y) = 2$
 som visar att F inte är konservativt.

(b) Enligt Green's formel är

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x - e^{y^2} + y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 3y^2 + x^5) \right) dx dy$$

$$= \iint_D (2 - 6y) dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$



D är ett x -enkelt område: $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 2-y$ och därmed

$$\iint_D (2-6y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (2-6y) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 (2-6y) (2-y-y) dy = \int_0^1 (2-6y)(2-2y) dy =$$

$$= 4 \int_0^1 (1-4y+3y^2) dy = 4 \left[y - 2y^2 + y^3 \right]_0^1 = 0$$

Svar: 0

(c)

$$\text{Arbetet} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Låt Γ vara det rätta lijestycket från $(0,0)$ till $(2,0)$

$$\text{Då } \oint_{\Gamma + \Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \text{enligt (b)} = 0$$

$$\text{varav } \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Vi beräknar $\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ m h a kurvintegralens definition:

Γ_1 har parametrisering $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2]$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^2 ((\sin t + t^5)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^2 (\sin t + t^5) dt = \left[-\cos t + \frac{t^6}{6} \right]_0^2 \\ &= \frac{35}{3} - \cos 2 \end{aligned}$$

Svar : Arbetet = $\cos 2 - \frac{35}{3}$.

7. Låt S vara den delyta av sfären som ligger mellan de två planen.

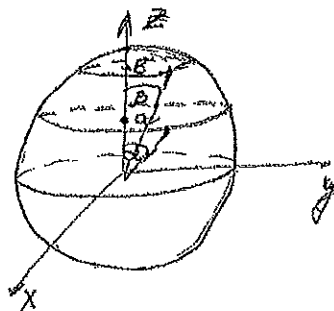
Vi kan anta att de två planen är parallella med xy -planet, dvs att de ges av $z = a$ och $z = b$, $a < b$.

Vi söker $\iint_S dS$

Vi parametriserar S m h a sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

R - sfärens radie
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $\alpha \leq \varphi \leq \beta$



Om $r = r(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$

så är

$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= i R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta - j R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta + k R^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

och

$$\|r'_\varphi \times r'_\theta\| = R^2 \sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} =$$

$$= R^2 \sqrt{\sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = R^2 \sin \varphi$$

Detta ger

$$\iint_S ds = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b R^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=a}^{\varphi=b} = 2\pi R (R \cos a - R \cos b) =$$

$$= \underline{2\pi R (a - b)}$$

Detta uttryck beror av bara
skårens radie och avståndet $a-b$ mellan
planen.

8a) låt V_1 vara en egenvektor till egenvärde λ_1
 V_2 λ_2

och $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Antag att V_1 och V_2 är parallella dvs
(*) $V_1 = c V_2$ för något tal c .

Då $A V_1 = \lambda_1 V_1$ och $A V_2 = \lambda_2 V_2$

Eftersom $A V_1 = \lambda_1 V_1$ och $A V_2 = \lambda_2 V_2$

så ger (1)

$$\lambda_1 V_1 = c \lambda_2 V_2 \quad (2)$$

Multiplikation av (*) med λ_1 ger

$$\lambda_1 V_1 = c \lambda_1 V_2 \quad (3)$$

(2) och (3) ger nu $c \lambda_2 V_2 = c \lambda_1 V_2$ och därmed
 $c(\lambda_2 - \lambda_1) V_2 = 0$

Eftersom $v_2 \neq 0$ som egenvektor och $\lambda_1 \neq \lambda_2$
så måste $c=0$ och därmed

$$v_1 = c v_2 = 0.$$

Detta är motsäpelse, ty v_1 är en egenvektor
och kan ej vara 0.