Matematik
Chalmers tekniska högskola 2014-04-24

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 10 97 Plats och tid: V, f.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt oberoende (5p)

(b) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$ och vilken dimension har nollrummet till $\boldsymbol{A}$? (motivera ditt svar). (2p)

(c) Bestäm en 4×4 matris $\boldsymbol{C}$ sådan att rangen för matrisen $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}$ är 3. (3p)

(a) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ har bara den triviala lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ty

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

(b) 4 pivotkolonner $\Rightarrow$ rang 4. Dimensionen på nollrummet är 0 (antalet kolonner i matrisen minus rangen).

(c) En matris sådan att vi får 3 pivotkolonner. Låt tex

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

2 (a) Använd variabelsubstitution och bestäm $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})\frac{\sqrt{x}}{2}dx$ (3p)

(b) Bestäm längden på kurvan $y = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ då $2 \leq x \leq 4$ (3p)

(c) Visa att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (3p)

(d) Visa varför man får olika svar när man bestämmer en approximation till $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ respektive $2\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$ med vänster rektangelregel och $h = 0.2$ (bredden på varje rektangel = 0.2). (4p)

(a) $\int \cos(\sqrt{x})\frac{\sqrt{x}}{2}dx = \left[\begin{array}{c} u = \sqrt{x} \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right] = \int u^2 \cos(u)\, du = [\text{P.I}] = u^2 \sin(u) - 2\int u \sin(u)\, du = [\text{P.I}] = \cdots = u^2 \sin(u) + 2u\cos(u) - 2\sin(u) + C = x\sin(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x}) + C$

(b) $y = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y' = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\frac{(e^x + 1)e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$. Längden på kurvan blir $L = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}dx = \int_2^4 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}dx = \int_2^4 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}dx = \left[\ln|e^x - e^{-x}|\right]_2^4 = \ln(e^4 - \frac{1}{e^4}) - \ln(e^2 - \frac{1}{e^2}) = \ln\frac{e^4 + 1}{e^2}$

(c) Integranden $f(x) = e^{-x^2}$ är en jämn funktion ($f(x) = f(-x)$) och integrationsintervallet är symmetriskt runt 0.

(d) Eftersom integranden växer på intervallet $[-1, 0]$ blir vänster rektangelregel en undersumma L (ett lite för litet värde). Analogt eftersom integranden avtar på intervallet $[0, 1]$ blir vänster rektangelregel en översumma U (ett lite för stort värde). Då man beräknar en approx till $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ adderar man L och U. Approximationen till $2\int_0^1 e^{-x^2} dx$ blir 2U, och $L + U \neq 2U$.

---

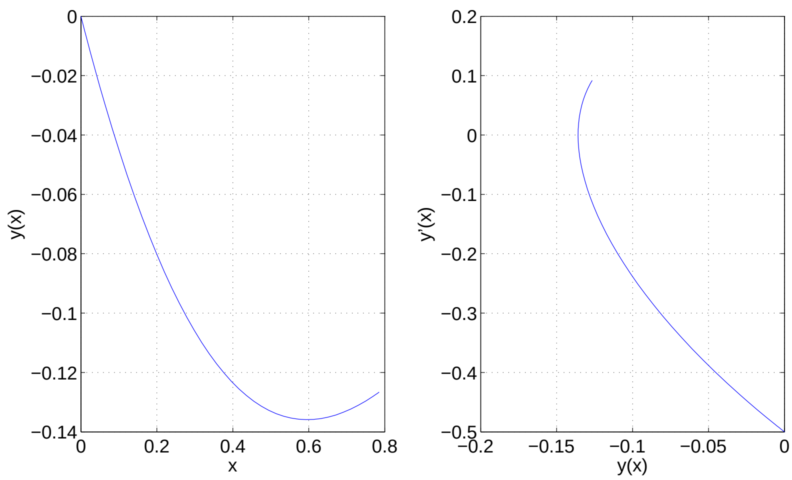
3 Låt

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin(x)$$

(a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen. (5p)
Ansätt $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\sin(x)$ för partikulärlösningen.

(b) Differentialekvationen har ordning två. Skriv om den till ett system av första ordningen. (3p)

(c) Man har löst differentialekvationen numeriskt med Matlab's `ode45` på intervallet $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ och ritat följande figurer: (4p)



Vilka begynnelsevärden har använts? Bestäm även konstanterna i homogenlösningen i (a).

(a) Karekteristisk ekvation $r^2 + 2r + 2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = -1 \pm i$ vilket ger homogenlösningarna $y_h = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x)$.
För partikulärlösningen ansätts $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\sin(x)$.
Vi får $y_p' = e^{-x}\cos(x)(A - Ax + Bx) + e^{-x}\sin(x)(B - Bx - Ax)$
och $y_p'' = e^{-x}\cos(x)(2B - 2Bx - 2A) + e^{-x}\sin(x)(2Ax - 2A - 2B)$.
$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \cdots = 2Be^{-x}\cos(x) - 2Ae^{-x}\sin(x)$, dvs vi måste ha $B = 0$ och $A = -1/2$ för att högerledet ska bli $e^{-x}\sin(x)$.
Svar: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{2}xe^{-x}\cos(x)$

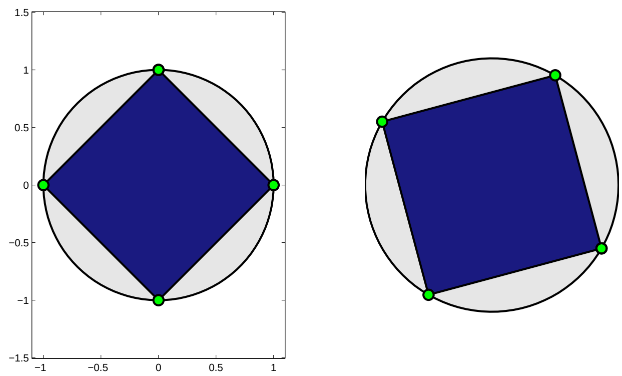
(b) Låt $u_1 = y$ och $u_2 = y'$. Vi får

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -2u_2 - 2u_1 + e^{-x}\sin(x) \end{cases}$$

(c) I den vänstra figuren ser vi att $y(0) = 0$ och i den högra ser vi att $y'(0) = -0.5$.
$y(0) = 0$ ger $C_1 = 0$.
$y' = y_p' + y_h' = e^{-x}\cos(x)(-1/2 + 1/2x) + e^{-x}\sin(x)(-1/2x) - C_2 e^{-x}\sin(x) + C_2 e^{-x}\cos(x)$
och $y'(0) = -1/2 + C_2 = -1/2$ ger $C_2 = 0$.

---

4 I figuren till vänster nedan har man ritat en kvadrat innesluten i enhetscirkeln. Kvadratens hörn har koordinaterna $(0,1)$,$(1,0)$,$(0,-1)$ och $(-1,0)$. I den högra figuren har kvadratens hörn roterats $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs.



(a) Härled en rotationsmatris $\boldsymbol{A}$ som transformerar (roterar) hörnkoordinaterna i kvadraten $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs. (4p)

(b) Använd rotationsmatrisen från (a) uppgiften och bestäm koordinaterna för kvadratens hörnpunkter i den högra figuren. (2p)

(c) Visa att avbildningen är bijektiv (både injektiv och surjektiv). (3p)

(a) Enhetsvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ avbildas på $\begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\cos(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Vi får $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$,
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{A}$ är inverterbar, ty $\det \boldsymbol{A} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \neq 0$ och alltså är avbildningen bijektiv.

---

5 (a) Lös differentialekvationen $y'(x) = 2xy(x)$, där $x \geq 1$ och $y(x) > 0$. (3p)

(b) Lös $y(x) = 2 + 2\displaystyle\int_2^x ty(t)dt$ (3p)

(a) Separabel, skriv om till $\frac{y'}{y} = 2x$. Vi får $\ln|y(x)| = x^2 + C_1$, dvs $y(x) = Ce^{x^2}$.

(b) Vi ser att $y'(x) = 2xy(x)$ som ju har lösning $y(x) = Ce^{x^2}$.
$y(2) = 2 + \int_2^2 ty(t)dt = 2$, dvs $2 = Ce^4 \Rightarrow C = \frac{2}{e^4}$ och $y(x) = \frac{2}{e^4}e^{x^2} = 2e^{x^2-4}$

Lycka till !!
önskar Katarina