Matematik
Chalmers tekniska högskola 2014-08-22

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon 0703-088304 Plats och tid: V, e.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna en bas för nollrummet till matrisen. (5p)

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet. (3p)

(c) Låt $\boldsymbol{B}$ bestå av de kolonner i $\boldsymbol{A}$ som *inte* är pivotkolonner. Bestäm rangen för $\boldsymbol{B}$. (2p)

(a) Den utökade matrisen reduceras till trappstegsform

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs x_2, x_4 och x_5 fria. Låt $x_2 = t_1, x_4 = t_2, x_5 = t_3$, vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De tre vektorerna utgör en bas för nollrummet till $\boldsymbol{A}$.

(b) Pivotkolonnerna $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som har två pivotkolonner och alltså rang 2.

---

2 (a) Använd variabelsubstitution och beräkna (3p)

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$$

(b) Visa att (4p)

$$2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

är divergent.

(c) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x < \infty$ roterar kring x-axeln. (3p)

(d) Formulera höger rektangelregel för numerisk beräkning av integraler. (3p)

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t + C =$ $\arctan(\sin(x)) + C$

(b) $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ då $x \geq 1$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ är divergent ty låt $K \geq 1$. Vi har $\int_1^K \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^K = \ln(x) \to \infty$ då $K \to \infty$

(c) Volymen $V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi \lim_{K\to\infty}(1-\frac{1}{K}) = \pi$

(d) Se litteraturen.

---

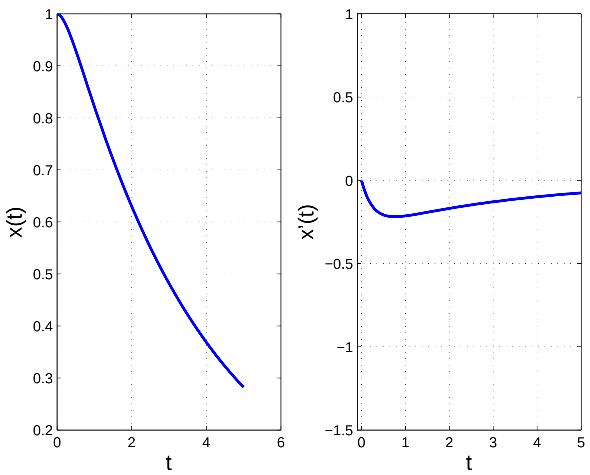
3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (4p)

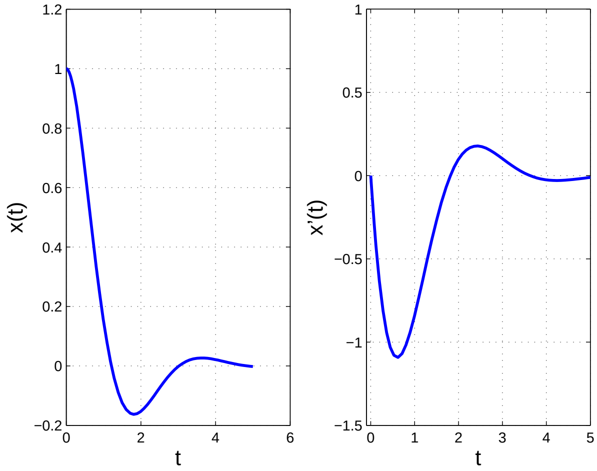
$$\begin{cases} y'(t) + 2ty(t) - t = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Betrakta differentialekvationen (4p)

$$x''(t) + 2ax'(t) + b^2x(t) = 0$$

där $a > 0$ och $b > 0$ är konstanter. Man har infört begynnelsevärden och löst differentialekvationen för $0 \leq t \leq 5$ numeriskt (i Matlab). Följande två figurpar har ritats.





I det ena figurparet har man använt $a = 1, b = 2$ och i det andra $a = 2, b = 1$. Vilka begynnelsevärden har använts? Vilka värden på a och b har använts i vilket figurpar? Motivera ditt svar.

(c) Bestäm alla lösningar till $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2\sin t$ (4p)

(a) Vi har första ordningen, linjär differentialekvation. Den integrerande faktorn blir e^{t^2} eftersom t^2 är en primitiv funktion till $2t$. Vi får

$$y(t)e^{t^2} = \int te^{t^2}dt + C = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \Leftrightarrow y(t) = e^{-t^2}\frac{1}{2}e^{t^2} + e^{-t^2}C = \frac{1}{2} + e^{-t^2}C$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $1 = \frac{1}{2} + C$, dvs $C = \frac{1}{2}$

(b) Av figurerna framgår att $x(0) = 1$, och $x'(0) = 0$.
Karakteristiska polynomet är $r^2 + 2ar + b^2 = 0$.
För $a = 1, b = 2$ får vi $r^2 + 2r + 4 = 0$ med rötterna $r_1 = -1 + i\sqrt{3}$ och $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Lösningen har utseendet $x(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t)$ Vi får alltså en oscillerande rörelse, vilket är det nedre figurparet.
För $a = 2, b = 1$ får vi $r^2 + 4r + 1 = 0$ med rötterna $r_1 = -2 + \sqrt{3}$ och $r_2 = -2 - \sqrt{3}$. Lösningen har utseendet $x(t) = (Ae^{(-2+\sqrt{3})t} + Be^{(-2-\sqrt{3})t})$ vilket är det övre figurparet.

(c) Karakteristiska polynomet $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dubbelroten $r = -1$ och vi får homogenlösningen $x_h = (At + B)e^{-t}$.
För partikulärlösningen används sinusreceptet. Låt $x_p = A\cos(t) + B\sin(t)$, vi får $x_p' = -A\sin(t) + B\cos(t), x_p'' = -A\cos(t) - B\sin(t)$ och
$x_p'' + 2x_p + x_p = -A\cos(t) - B\sin(t) + 2(-A\sin(t) + B\cos(t)) + A\cos(t) + B\sin(t) = 2B\cos(t) - 2A\sin(t)$
Vi vill alltså att $2B\cos(t) - 2A\sin(t) = 2\sin(t)$. Vi får $A = -1$ och $B = 0$. Dvs $x_p = -\cos(t)$.
Den fullständiga lösningen blir alltså $x = x_h + x_p = (At + B)e^{-t} - \cos(t)$

---

4 (a) Beräkna kvoten $\dfrac{4-i}{2+3i}$ (3p)

(b) Skissa mängden av alla punkter z i det komplexa talplanet (3p)

(c) Låt z och w vara två komplexa tal med argumenten ϕ respektive θ och absolutbeloppen 1. Visa att argumentet för produkten zw är $(\phi + \theta)$ (3p)

(a) $\dfrac{4-i}{2+3i} = \dfrac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{5-14i}{4+9} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{14}{13}i$

(b) Alla punkter z utgör en cirkel med centrum i punkten $3i$ och med radien 2 i det komplexa talplanet.

(c) $zw = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) + i(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta) = \cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta)$

---

5 Låt $\boldsymbol{D}$ vara en 2×20000-matris med koordinater i planet och låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ vara två 2×2 standardmatriser för olika linjära avbildningar. (3p)

(a) Följande matlabsekvens beräknar transformationen $\boldsymbol{ABD}$ på två olika sätt.

```
Dn = A*(B*D);
Dm = (A*B)*D;
```

Hur många produkter av matriselement utförs då man beräknar `Dn` respektive `Dm`.

(b) Antag $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Bestäm $\boldsymbol{A}$. (3p)

(a) `Dn`: $4 * 20\ 000 + 4 * 20\ 000 = 160\ 000$ produkter.
`Dm`: $8 + 4 * 20\ 000 = 80\ 008$ produkter.

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 27 \end{bmatrix}$

Lycka till !!
önskar Katarina