Matematik
Chalmers tekniska högskola 2015-01-15

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Anders Martinsson, telefon 0703-088304 Plats och tid: V, f.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 En $n \times n$ matris $\boldsymbol{A}$ är positivt definit om $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk (dvs $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$) och om $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ för alla $n \times 1$ vektorer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

(a) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Visa att $\boldsymbol{A}$ är positivt definit. (4p)

(b) Visa att varje positivt definit matris är inverterbar. (4p)

(a) $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk, ty $\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$. Låt $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$ då $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

(b) Om $\boldsymbol{A}$ är singulär (icke inverterbar) finns ett $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ s.a. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ och då är även $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ vilket strider mot att $\boldsymbol{A}$ är positivt definit.

---

2 Låt $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm bas för nollrumet till $\boldsymbol{B}$. Bestäm även rangen för $\boldsymbol{B}$. (5p)

(b) En permutationsmatris $\boldsymbol{P}$ är en (kvadratisk) matris som har precis en etta i varje rad och varje kolonn och vars övriga element är 0. Bestäm en permutationsmatris $\boldsymbol{P}$ sådan att produkten (3p)

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 15 & 12 & 13 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

(a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
Rangen för $\boldsymbol{B}$ är 2, ty 2 pivotkolonner. Vi får x_3, x_4, x_5 fria. Låt $x_3 = s, x_4 = t, x_5 = u$, vi får

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 + u\boldsymbol{v}_3 = s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ där } \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$$

är bas för nollrummet till $\boldsymbol{B}$

(b) $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

---

3 Observera att angiven teknik måste användas för att poäng ska erhållas på uppgiften.

(a) Använd variabelsubstitution och bestäm $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$ (4p)

(b) Använd partiell integration (2 gånger) och bestäm $\displaystyle\int x^2 \sin x \; dx$ (4p)

(a) $$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \begin{bmatrix} u = x^2+1 \\ du = 2xdx \\ x = 0 \to u = 1 \\ x = 1 \to u = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{3}{2}\left[u^{\frac{2}{3}}\right]_1^2 = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - 1)$$

(b) $$\int x^2 \sin x \; dx = (-\cos x)x^2 - \int (-\cos x)2x \; dx =$$

$$-x^2 \cos x + (\sin x)2x - \int (\sin x)2 \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C =$$

$$(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + C$$

---

4 Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

(a) Bestäm lösningen till ranvärdesproblemet ovan genom att först bestämma alla lösningar till $y''(x) + y(x) = 0$ och sedan bestämma konstanterna med hjälp av randvärdena. (5p)

(b) Formulera ett begynnelsevärdesproblem för ekvationen ovan. Begynnelsevärdesproblemet ska ha samma lösningar som randvärdesproblemet ovan och det ska vara formulerat som ett system av första ordningens ekvationer. Motivera valet av begynnelsevärden. (3p)

(c) Bestäm en partikulärlösning till $y''(x) + y(x) = x^3$ (4p)

(a) Karakteristisk ekvation $r^2 + 1 = 0$ har lösningarna $r = \pm i$. Vi får $y(x) = A\cos x + B\sin x$. $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ och $y(\pi/2) = 1 \Rightarrow B = 1$. Dvs $y(x) = \sin(x)$.

(b) Låt $u_1(x) = y(x)$ och $u_2(x) = y'(x)$. Vi får då $u_1'(x) = u_2(x)$ och $u_2'(x) = -u_1(x)$. Vi har begynnelsevärdena $u_1(0) = y(0) = 0$. Eftersom $y(x) = \sin x$ (från (a)) får vi $y'(x) = \cos x$ och $\cos 0 = 1$, dvs. $u_2(0) = 1$ Vi får begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = -u_1(x) \\ u_1(0) = 0, u_2(0) = 1 \end{cases}$$

(c) Ansätt $y_p = Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Vi får $y_p' = 3Ax^2+2Bx+C$ och $y_p'' = 6Ax+2B$ och därmed

$y_p''+y_p = 6Ax+2B+Ax^3+Bx^2+Cx+D = x^3A+x^2B+x(6A+C)+2B+D.$

Identifiering med högerledet x^3 ger

$A = 1$

$B = 0$

$6A + C = 0,$ dvs. $6 + C = 0 \Rightarrow C = -6$

$2B + D = 0$ dvs. $D = 0$.

Vi får $y_p = x^3 - 6x$

---

5 (a) Beräkna $\frac{4-i}{2+3i}$. (3p)

(b) Använd definitionen för den komplexa expontentialfunktionen och visa att $(1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it}$ är reellt (4p)

(a) $$\frac{4-i}{2+3i} = \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-14i}{4+9} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$$

(b) $(1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it} = e^{it} + e^{-it} + i(e^{it} - e^{-it}) =$

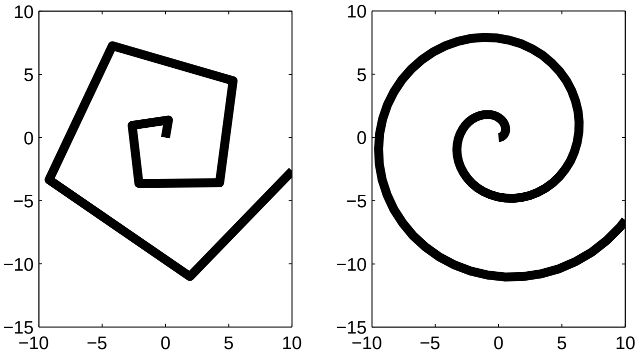
$\cos(t) + i\sin(t) + \cos(t) - i\sin(t) + i(\cos(t) + i\sin(t) - \cos(t) + i\sin(t)) =$

$2\cos(t) + i(2i\sin(t)) = 2(\cos(t) - \sin(t))$

---

6 Man har använt matlabkoden nedan med olika värden på n för att rita spiralerna i figuren nedan. Ju större värde på n som används, desto mer spirallik blir kurvan. Om $n \to \infty$ får man arkimedes spiral.

```
n = 10;
t = linspace(0,4*pi,n);
x = @(t)t.*cos(t);
y = @(t)t.*sin(t);
plot(x(t),y(t));
```



(a) Formulera en formel för att bestämma längden L på polygontåget som ges av matlabkoden ovan. (Du får svara i matlabkod om du vill, men det är inte nödvändigt). (2p)

(b) Härled en formel för att bestämma längden (analytiskt) på spiralen i figuren ovan. Använd sedan den formeln för att bestämma längden på den del av spiralen som ligger mellan vinklarna $t = 0$ och $t = 2$. (5p)

(a) Polygontågets längd kan beräknas med

$$L = \sum_{i=1}^{9} \sqrt{(t_{i+1}\cos(t_{i+1}) - t_i\cos(t_i))^2 + (t_{i+1}\sin(t_{i+1}) - t_i\sin(t_i))^2}$$

där $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h \ldots t_{10} = 4\pi$ och $h = 4\pi/9$

(b) Låt

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(t) \\ y(t) = t\sin(t) \\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

Vi får

$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} =$

$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i})^2 + (\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i})^2}\ |t_{i+1} - t_i| \to$

$\int_0^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$ då $n \to \infty$

Vi har $\begin{cases} x'(t) = \cos(t) - t\sin(t) \text{ och } x'(t)^2 = \cos^2(t) + t^2\sin^2(t) - 2t\cos(t)\sin(t) \\ y'(t) = \sin(t) + t\cos(t) \text{ och } y'(t)^2 = \sin^2(t) + t^2\cos^2(t) + 2t\cos(t)\sin(t) \end{cases}$

Vi får $\int_0^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^2 \sqrt{1 + t^2}dt =$ [enligt formelblad]

$= [\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2+1})]_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$

Lycka till !!

önskar Katarina