Matematik
Chalmers tekniska högskola 2015-04-13

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 10 97 Plats och tid: V, e.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 En $n \times n$ matris $\boldsymbol{D}$ är positivt definit om $\boldsymbol{D}$ är symmetrisk (dvs $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^T$) och om $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} > 0$ för alla $n \times 1$ vektorer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

(a) Låt $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Visa att $\boldsymbol{D}$ *inte* är positivt definit. (3p)

(b) Låt

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

vara en $n \times n$ diagonalmatris. Visa att $\boldsymbol{D}$ är positivt definit bara om alla diagonalelementen $d_i > 0$. (4p)

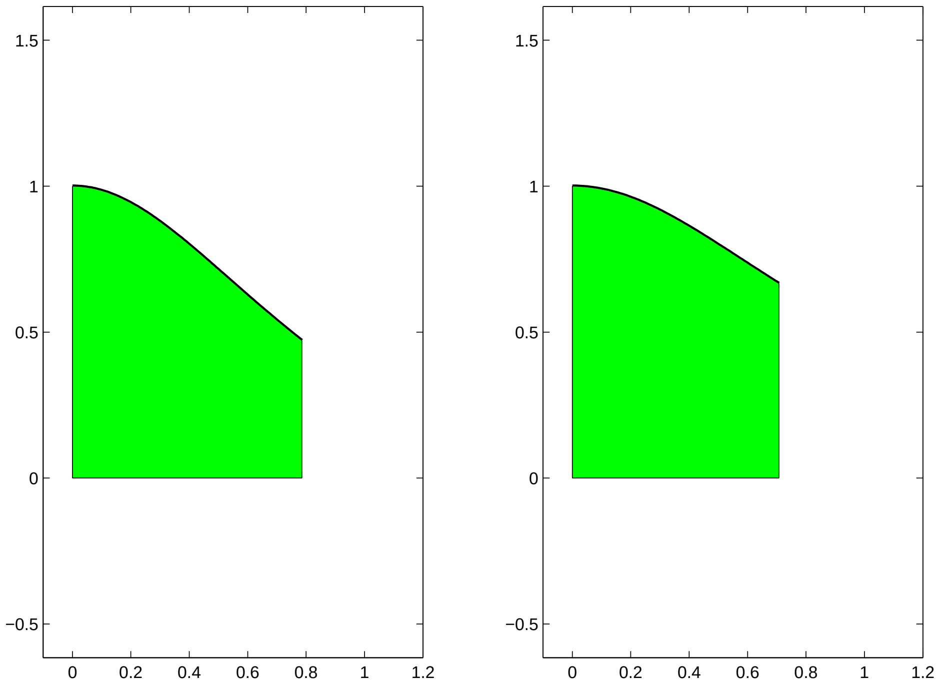
(c) Antag att $\boldsymbol{D}$ är en $n \times n$ positivt definit diagonalmatris. Vilken rang har då matrisen. Motivera ditt svar. (2p)

(a) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = -5x_1^2 + 5x_2^2$

och $-5x_1^2 + 5x_2^2 < 0$ för tex $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$ som är > 0 för alla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ bara om alla $d_i > 0$

(c) Rang n. Eftersom $\boldsymbol{D}$ är positivt definit är alla diagonalelementen nollskilda, dvs det finns ett pivotelement i varje kolonn i $\boldsymbol{D}$.



2

I den vänstra figuren ovan har man färglagt arean som innesluts av $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ och x-axeln mellan 0 och $\dfrac{\pi}{4}$. I den högra figuren har man färglagt arean som innesluts av $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ och x-axeln, mellan 0 och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(a) Visa att areorna i bägge figurerna är lika stora (3p)

(b) Beräkna arean (2p)

(a) Arean av det vänstra området ges av $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^2} dt$$ som är arean av området i den högra figuren.

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

3 (a) Följande begynnelsevärdesproblem utgör en matematisk modell för förtvålning av etylacetat med natriumhydroxid (5p)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = (a - y(t))(b - y(t)), t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

a och b är startkoncentration av etylacetat respektive natriumhydroxid. $y(t)$ är koncentrationen av bildad etanol vid tiden t. Låt $a = 1$ och $b = 2$ och antag att $y < a$ och $y < b$. Lös begynnelsevärdesproblemet.

Ledning: Differentialekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)}y' = 1$$

Använd partialbråksuppdelning för att integrera vänsterledet.

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet i (a) uppgiften på intervallet $0 \le t \le 0.5$ med Euler's metod. Använd steglängden $h = 0.25$. (4p)

(c) Låt

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin(x)$$

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen. (5p)
Ansätt $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\sin(x)$ för partikulärlösningen.

(a) Ekvationen kan skrivas

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)}y' = 1$$

Använd partialbråksuppdelning för att integrera vänsterledet

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)} = \frac{A}{(y-1)} + \frac{B}{(y-2)}$$

Multipliceera med vänsterledets nämnare

$$1 = A(y-2) + B(y-1) = y(A+B) - 2A - B$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$$

Vi får $A = 1$ och $B = -1$, och

$$\int \frac{1}{(1-y)(2-y)}\,dy = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y-2}\,dy = \ln|y-1| - \ln|y-2|) + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

Utnyttja att $0 \le y < 1$, och vi får

$$\ln(1-y) - \ln(2-y) = t + C$$

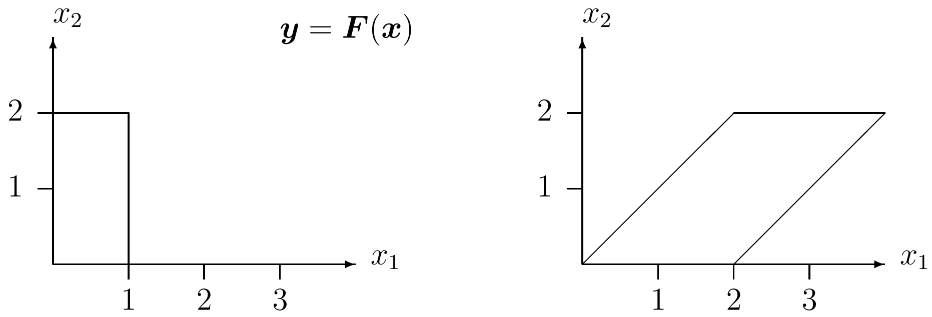
$y(0) = 0 \Rightarrow C = -\ln 2$

(b)

$$\begin{aligned} &y(0) = 0 \\ &y(\tfrac{1}{4}) = y(0) + h(1-y(0))(2-y(0)) = 0 + \tfrac{1}{4}(1-0)(2-0) = \tfrac{1}{2} \\ &y(\tfrac{1}{2}) = y(\tfrac{1}{4}) + h(1-y(\tfrac{1}{4}))(2-y(\tfrac{1}{4})) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{2})(2-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{11}{16} \end{aligned}$$

(c) Karekteristisk ekvation $r^2 + 2r + 2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = -1 \pm i$ vilket ger homogenlösningarna $y_h = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x)$.
För partikulärlösningen ansätts $y_p = Axe^{-x}\cos(x) + Bxe^{-x}\sin(x)$.
Vi får $y_p' = e^{-x}\cos(x)(A - Ax + Bx) + e^{-x}\sin(x)(B - Bx - Ax)$
och $y_p'' = e^{-x}\cos(x)(2B - 2Bx - 2A) + e^{-x}\sin(x)(2Ax - 2A - 2B)$.
$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \cdots = 2Be^{-x}\cos(x) - 2Ae^{-x}\sin(x)$, dvs vi måste ha $B = 0$ och $A = -1/2$ för att högerledet ska bli $e^{-x}\sin(x)$.
Svar: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x) - \frac{1}{2}xe^{-x}\cos(x)$

4 Betrakta avbildningen som beskrivs av bilden nedan



(a) Ange standardmatrisen $\boldsymbol{A}$ för avbildningen. (4p)

(b) Vilken standardmatris har den omvända avbildningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})$? (4p)

(c) En rotation moturs med vinkeln θ ges av standardmatrisen (3p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Om vi istället roterar *medurs*, vad får vi då för standardmatris? Motivera ditt svar.

(a) Vi har $F(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Avbildningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{y})$ har standardmatrisen $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Rotera med vinkeln θ medurs ger samma resultat som att rotera med vinkeln $-\theta$ moturs. Därför får vi standardmatrisen $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

---

5 Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -2u'' = 200x, 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u(1) = 2 \end{cases}$$

(5p)

(a) Skriv om problemet till en matrisekvation genom att dela in intervallet för x i 5 likformiga delintervall (med längden $h = 0.2$) och ersätta andraderivatan med differensapproximationen $u''(x) = \dfrac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$
Vi vill se matrisen och högerledsvektorn.

(b) Hur många elementära radoperationer behöver man (minst) utföra för att radrecuera matrisen från (a) uppgiften till trappstegsform (triangulär form) ? Antag matrisen är av storleken $n \times n$. Motivera ditt svar. (2p)

(c) Beräkna determinanten för matrisen i (a) uppgiften. (4p)

Ledning: Om du inte löst (a)-uppgiften men vill svara på (b) och (c), utgå från att matrisen i (a) har nollskilda element på huvuddiagonalen och de två diagonalerna närmst över och under huvuddiagonalen. Alla andra element är 0.

(a) Låt $h = 0.2$. Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \ldots 5$. Låt $u(x_i) = u_i$. Vi får
$-2u''(x_i) = -2\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 200x_i$ och
Utnyttja att $u_0 = 1$ och $u_5 = 2$, vi får matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \\ 2.4 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

(b) För att nollställa diagnonalen under huvuddiagonalen behövs $n - 1$ elementära radoperationer.

(c) $\det A = 5$ (använd tex. cofaktor-utveckling längs första raden)

Lycka till !!
önskar Katarina