Matematik
Chalmers tekniska högskola 2015-08-21

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon 0703-088304 Plats och tid: V, e.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ p \end{bmatrix}$ där p är ett reellt tal.

(a) Bestäm p så att ekvationssystemet $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ är lösbart. (4p)

(b) Ange en vektor som *inte* kan skrivas som en linjärkombination av kolonnvektorerna i $\boldsymbol{A}$. Motivera ditt svar. (3p)

(c) Bestäm nollrummet till $\boldsymbol{A}$. Vilken rang har $\boldsymbol{A}$? (4p)

(a) Radreducera den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 & p \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 2+p \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4+p \end{array}\right] \sim$$

dvs $-4 + p = 0$, och alltså $p = 4$.

(b) Tex $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ eftersom ekvationssystemet i $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ej är lösbart.

(c) Alla lösningar till $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$,

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 fri, låt $x_3 = t$, vi får $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Dvs $\mathrm{Nul}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Span}\begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Rangen är 2.

---

2 (a) Beräkna en approximation till integralen $\int_0^1 \tan\sqrt{x}\, dx$ Använd höger rektangelregel med steglängden $h = 0.5$. Blir approximationen större eller mindre än det exakta värdet? (motivera ditt svar) (4p)

(b) Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^4}dx$ (4p)

(a) Höger rektangelregel: $S = 0.5(\tan(\sqrt{0.5}) + \tan(1))$. $S > \int_0^1 \tan(\sqrt{x})dx$ eftersom integranden växer på intervallet.

(b) $\lim_{K\leftarrow\infty} \int_1^K \frac{2x}{1+x^4}dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array}\right] = \lim_{K\leftarrow\infty} \int_1^K \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

---

3 (a) Låt (4p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu} & e^{-\mu} \end{bmatrix}$$

där $\mu \in \mathbb{R}$. För vilka värden på μ är $\mathbf{A}$ inverterbar? (Visa ditt svar)

(b) Låt $\mu \neq 0 \in \mathbb{R}, y_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ och och bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} y''(x) + \mu^2 y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = y_1 \end{cases}$$

(c) Låt $\mu \neq 0$ Bestäm en partikulärlösning till (4p)

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = x^2$$

Verifiera även ditt svar genom att kontrollräkna din lösning. Redovisa även kontrollräkningen.

(d) Klassificera differentialekvationerna i (b) och (c), för var och en ange om de är homogena, linjära. Ange också ordning. (1p)

(a) För alla $\mu \neq 0$ ty $\det(\boldsymbol{A}) = e^{-\mu} - e^{\mu} = \dfrac{1 - e^{2\mu}}{e^{\mu}} \neq 0$ om $\mu \neq 0$

(b) Karekteristisk ekvation blir $r^2 + \mu^2 = 0$ med lösningar $r_{1,2} = \pm\mu i$. Vi får den allmänna lösningen

$$y(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ och därmed $y'(x) = \mu B\cos(\mu x)$.
$y'(0) = y_1 \Rightarrow B = \frac{y_1}{\mu}$. Svar: $y(x) = \frac{y_1}{\mu}\sin(\mu x)$

(c) Polynomreceptet, ansätt $y_p = Ax^2 + Bx + C$, dvs $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$. Vi får $y_p'' - \mu^2 y_p = 2A - \mu^2(Ax^2 + Bx + C) = -x^2(A\mu^2) - x(B\mu^2) + (2A - \mu^2 C) = x^2$, dvs $A = -\frac{1}{\mu^2}$, $B = 0$ och $C = -\frac{2}{\mu^4}$. Svar: $y_p = -\frac{1}{\mu^2}x^2 - \frac{2}{\mu^4}$.

Kontroll: $y_p = -\dfrac{x^2}{\mu^2} - \dfrac{2}{\mu^4}$, $y_p' = -\dfrac{2x}{\mu^2}$, $y_p'' = -\dfrac{2}{\mu^2}$

$$y_p'' - \mu^2 y_p = -\frac{2}{\mu^2} - \mu^2\left(-\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{2}{\mu^4}\right) = -\frac{2}{\mu^2} + x^2 + \frac{2}{\mu^2} = x^2$$

(d) Bägge är linjära, bägge har ordning 2, (b) är homogen, (c) är inhomogen.

---

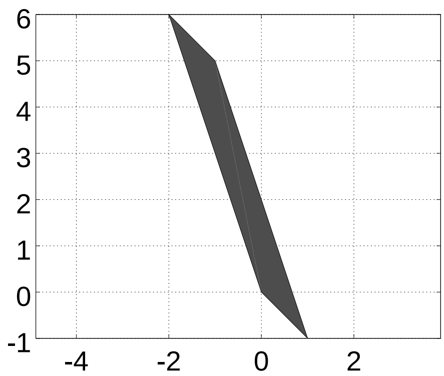
4 Låt $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vara två avbildningar.

(a) Avgör vilka av avbildningarna ovan som är linjära. Motivera ditt svar. (4p)

(b) Man har använt avbildningen $\boldsymbol{T}$ ovan för att beräkna bilden av en rektangel med höjden 2 och bredden 1, och med ett hörn i origo. Rita bilden och beräkna dess area. (4p)

(a) Låt $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{S}$ är inte linjär ty
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+1 \\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2) \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b})$. $\boldsymbol{T}$ däremot är linjär ty matris-vektor produkt uppfyller linjäritetsvillkoren.

(b)



Arean är $2 * \det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}) = 2 * 2 = 4$

---

5 Låt $I_n = e^{-1} \int_0^1 e^x x^n dx$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

(a) Visa att $I_0 = 1 - e^{-1}$ (2p)

(b) Visa att integralvärdena (4p)

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 e^x x^n dx$$

kan beräknas med hjälp av rekursionsformeln

$$I_{n+1} = 1 - (n+1) I_n$$

(c) Man har använt följande matlabsekvens för att beräkna $I_0, I_1, I_2, \ldots$ (3p)
(Obs $1 - e^{-1} \approx 0.6321$)

```
I = 0.6321
for n=0:7
  I = 1 - (n+1)*I
end
```

När man kör sekvensen ovan får man följande utskrifter

```
I =  0.6321
I =  0.3679
I =  0.2642
I =  0.2074
I =  0.1704
I =  0.1480
```

```
I =  0.1120
I =  0.2160
I = -0.7280
```

Visa att värdet på I_7 inte är rimligt.

(a) $I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x x^0\ dx = e^{-1}\int_0^1 e^x\ dx = e^{-1}[e^x]_0^1 = e^{-1}(e^1 - e^0) = 1 - e^{-1}$

(b) $I_{n+1} = e^{-1}\int_0^1 e^x x^{n+1}\ dx = [\text{ P.I. }] = e^{-1}([\ e^x x^{n+1}\ ]_0^1 - (n+1)\int_0^1 e^x x^n\ dx) =$
$e^{-1}(e^1 - (n+1)\int_0^1 e^x x^n\ dx) = 1 - (n+1)I_n$

(c) Eftersom det, på intervallet $[0,1]$ gäller för integranderna att $e^x x^n > e^x x^{n+1}$ har vi att $I_n > I_{n+1}$ för $n = 0, 1, 2\ldots$ I utskriften är $I_6 < I_7$, vilket alltså är fel.

Lycka till !!
önskar Katarina