Tentamen

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

160109 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 031-7723557

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. Ej heller miniräknare.

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_3^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ (3p)

(b) Låt $A = \displaystyle\int_1^{e} \sin(\ln x)\,dx$. Använd partiell integration för att visa att

$$A = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - A$$

och bestäm sedan, med hjälp av detta, värdet på A. (3p)

2. Låt D vara det område i xy-planet som beskrivs av $0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, $1 \leq x \leq 2$.
Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring x-axeln. (5p)

3. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} (1+x^2)y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (4p)

(b) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 4t$ (4p)

4. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm (om möjligt) en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ som inte kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (Motivera ditt svar!) (3p)

(b) Är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt oberoende? (Motivera ditt svar!) (2p)

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna $det(A)$ och förklara på vilket sätt determinantens värde visar att A är inverterbar. (3p)

(b) Bestäm elementet på rad 3 och kolonn 2 i A^{-1}. (3p)

VÄND!

6. Låt L vara den linje i planet som går genom origo och punkten $(1, 3)$ och låt;

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $(4, -2)$ på linjen L. (1p)

(b) Visa att A är standardmatrisen för den linjära avbildning som motsvarar projektion av punkter i planet på linjen L. (3p)

(c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en ON-bas för kolonnrummet till matrisen A. (4p)

(b) Bestäm alla matriser C sådana att $AC = I$, där I är en identitetsmatris. (3p)

8. (a) Bevisa att om A och B är inverterbara matriser av samma typ så är även AB inverterbar med inversen $B^{-1}A^{-1}$. (3p)

(b) Visa att A är inverterbar om A är radekvivalent med identitetsmatrisen (3p)
(obs ! notera att du inte behöver visa ekvivalens utan bara implikation åt ena hållet).

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$