Lösningsförslag till tentamen

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

160109 kl. 14.00 - 18.00

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Thomas Wernstål , telefon: 031-7723557

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. Ej heller miniräknare.

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_3^\infty xe^{-x^2}\,dx$ (3p)

Lösning: $\displaystyle\int_3^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_3^\infty e^{-x^2}\,2x\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x^2 & x = 3 \Rightarrow u = 9 \\ du = 2x\,dx & x \to \infty \Rightarrow u \to \infty \end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int_9^\infty e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_9^\infty = \frac{1}{2}e^{-9}$$

Svar: $\displaystyle\int_3^\infty xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{-9}$

(b) Låt $A = \displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)\,dx$. Använd partiell integration för att visa att

$$A = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - A$$

och bestäm sedan, med hjälp av detta, värdet på A. (3p)

Lösning: $A = \displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)\,dx = \left[x\sin(\ln x)\right]_1^e - \int_1^e x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx =$

$= e\sin 1 - \displaystyle\int_1^e \cos(\ln x)\,dx = e\sin 1 - \left(\left[x\cos(\ln x)\right]_1^e - \int_1^e x(-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx\right) =$

$= e\sin 1 - \left(e\cos 1 - 1 + \displaystyle\int_1^e \sin(\ln x)\,dx\right) = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - A$

Av detta följer att $2A = e(\sin 1 - \cos 1) + 1$ och därmed $A = \frac{1}{2}\left(e(\sin 1 - \cos 1) + 1\right)$

Svar: $A = \dfrac{1}{2}\left(e(\sin 1 - \cos 1) + 1\right)$

2. Låt D vara området i xy-planet som beskrivs av $0 \le y \le \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, $1 \le x \le 2$.
Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring x-axeln. (5p)

Lösning: Rotationsvolymen V kan beräknas enligt följande;

$$V = \int_1^2 \pi\left(\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \pi\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \pi\left[\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^2 =$$

$$= \pi\left(\ln 2 - \ln 3 + \frac{1}{3} + \ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \pi\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

Svar: Volymen av rotationskroppen är $\pi\left(\ln\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6}\right)$

3. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} (1+x^2)y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (4p)

Lösning: $(1+x^2)y' = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{y} = \arctan x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{\arctan x + C}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger att $1 = -1/C$ dvs. $C = -1$.

Svar: Lösningen på begynnelsevärdesproblemet är $y = \dfrac{1}{1 - \arctan x}$

(b) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 4t$ (4p)

Svar: Differentialekvationen är linjär med konstanta koefficienter och dess karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ har lösningarna $r_1 = -2$ och $r_2 = 1$ så motsvarande homogena differentialekvation har den allmänna lösningen $y_h = C_1e^{-2t} + C_2e^t$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = At + B$ som insatt i differentialekvationen ger att $A - 2(At + B) = 4t$. Identifikation av koefficienter i vänster- och högerled ger då att $-2A = 4$ och $A - 2B = 0$ dvs. $A = -2$ och $B = -1$.

Svar: Den allmänna lösningen på differentialekvationen är $y = C_1e^{-2t} + C_2e^t - 2t - 1$.

4. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm (om möjligt) en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ som inte kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (Motivera ditt svar!) (3p)

Lösning: $\mathbf{b}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ om det finns $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sådana att $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ dvs. om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $A = [\ \mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3\ ]$. Radelimination på totalmatrisen för detta system ger;

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -3 & b_3 - 2b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

Vi ser att systemet saknar lösning precis då $b_1 - 2b_2 + b_3 \neq 0$. Det är lätt att hitta värden på b_1, b_2, b_3 som inte ger likhet (nästan alla slumpvisa val) t.ex. kan vi välja b_1 och b_2 fritt och sedan se till att välja b_3 så att $b_1 - 2b_2 + b_3 \neq 0$. Med $b_1 = b_2 = 0$ så duger vilket $b_3 \neq 0$ som helst t.ex. $\mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$.

Svar: T.ex. $\mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$

(b) Är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt oberoende? (Motivera ditt svar!) (2p)

Svar: Om $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vore linjärt oberoende så skulle de också bilda en bas för $\mathbb{R}^3$ (ty $\mathbb{R}^3$ har dimensionen 3 vilket innebär att varje uppsättning av 3 linjärt oberoende vektorer för $\mathbb{R}^3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$). Men om vektorerna bildade en bas för $\mathbb{R}^3$ så skulle alla vektorer i $\mathbb{R}^3$ kunna skivas som en linjärkombination av vektorerna, vilket vi sett i (a) att så inte är fallet.

Alternativt framgår det också av radeliminationen i lösningen till (a) att de inte är linjärt oberoende ty det finns oändligt med lösningar till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna $det(A)$ och förklara på vilket sätt determinantens värde visar att A är inverterbar. (3p)

Lösning:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -42$$

Svar: $det(A) = -42$. A är inverterbar eftersom $det(A) \neq 0$.

(b) Bestäm elementet på rad 3 och kolonn 2 i A^{-1}. (3p)

Lösning: Enligt Sats 3.3.8 är $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$ och speciellt följer att elementet på rad 3 och kolonn 2 i A^{-1} är;

$$\frac{1}{det(A)} C_{23} = \frac{-1}{det(A)} det(A_{23}) = \frac{1}{42} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{42} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-3}{42} = \frac{-1}{14}$$

Svar: Elementet på rad 3 och kolonn 2 i A^{-1} är $-1/14$.

6. Låt L vara den linje i planet som går genom origo och punkten $(1, 3)$ och låt;

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $(4, -2)$ på linjen L. (1p)

Lösning: Den ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{y}}$ av $\mathbf{y} = (4, -2)$ på den linje L som spänns upp av vektorn $\mathbf{u} = (1, 3)$ är;

$$\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_L \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{-2}{10}(1, 3) = \frac{-1}{5}(1, 3)$$

Svar: $\frac{-1}{5}(1, 3)$

(b) Visa att A är standardmatrisen för den linjära avbildning som motsvarar projektion av punkter i planet på linjen L. (3p)

Lösning: Om vi betecknar avbildningen med T så ges standardmatrisen av $A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}$, där $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ och $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ är standardbasen i $\mathbb{R}^2$. Vi får att;

$$T(\mathbf{e}_1) = \hat{\mathbf{e}}_1 = \text{proj}_L \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{1}{10}(1, 3)$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \hat{\mathbf{e}}_2 = \text{proj}_L \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{3}{10}(1, 3)$$

så

$$A = \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (3p)

Lösning: $$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1/10 - \lambda & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\frac{1}{10} - \lambda)(\frac{9}{10} - \lambda) - \frac{9}{100} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Egenvärdena till A är således 0 och 1.

Låt oss nu bestämma egenvektorerna till respektive egenvärde;

$$\lambda = 0 : A - 0I = \begin{bmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Egenvektorer: } s\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 1 : A - 1I = \begin{bmatrix} -9/10 & 3/10 \\ 3/10 & -1/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Egenvektorer: } s\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Egenvärdena och egenvektorerna till A kan alternativt också bestämmas bara genom att studera motsvarande linjära avbildning. Det är t.ex. uppenbart att alla punkter på linjen L, dvs. punkter av typen $s(1,3)$, projiceras på sig själva dvs. $T(s,3s) = (s,3s)$, vilket alltså betyder att 1 är ett egenvärde med egenvektorerna $s(1,3)$. Vidare inses också lätt att alla punkter på linjen genom origo och $(-3,1)$ projiceras på origo, eftersom denna linje är vinkelrät mot den givna linjen L. Alla punkter av typen $s(-3,1)$ projiceras således på origo dvs. $T(-3s,s) = \mathbf{0} = 0(-3s,s)$, vilket alltså betyder att 0 är ett egenvärde med egenvektorerna $s(-3,1)$.

Svar: Matrisen har egenvärdena 0 och 1 med tillhörande egenvärden

$$s\begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}^T, s \in \mathbb{R}, \text{ respektive } s\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T, s \in \mathbb{R}$$

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en ON-bas för kolonnrummet till matrisen A. (4p)

Lösning:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Av Sats 2.8.13 i Lay vet vi att pivotkolonnerna i A bildar en bas för kolonnrummet dvs;

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Men 3 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$ bildar också en bas för $\mathbb{R}^3$ (enligt Sats 2.9.15) och spänner då speciellt upp hela $\mathbb{R}^3$, så kolonnrummet till A är hela $\mathbb{R}^3$. Enklast väljer vi därför standardbasen i $\mathbb{R}^3$ som ON-bas för kolonnrummet dvs.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Om man inte gör denna observation utan istället försöker använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod så får man jobba lite mer för att få fram en ON-bas. I denna metod har det också betydelse för kalkylerna i vilken ordning vi använder vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ ovan. Eftersom $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_4$ är ortogonala börjar vi lämpligen algoritmen med dem. Vi sätter $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_4, \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_1, \mathbf{x}_3 = \mathbf{a}_2$ och får då;

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \tfrac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \tfrac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \tfrac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \tfrac{2}{3}\mathbf{a}_4 - \tfrac{11}{26}\mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{78}\begin{bmatrix} -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}^T$$

Normerar vi dessa vektorer så får vi ON-basen;

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \frac{1}{\sqrt{78}}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Svar: Standardbasen $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ bildar en ON-bas för kolonnrummet (alternativt duger varje mängd av tre ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^3$).

(b) Bestäm alla matriser C sådana att $AC = I$, där I är en identitetsmatris. (3p)

Lösning: Radelimination på totalmatrisen för detta system ger;

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Av detta avläser vi lösningarna;

Svar: $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t & u \end{bmatrix}, \ s, t, u \in \mathbb{R}$

8. (a) Bevisa att om A och B är inverterbara matriser av samma typ så är även AB inverterbar med inversen $B^{-1}A^{-1}$. (3p)

Bevis: Se Sats 2.2.6.b, sid 123, i Lay.

(b) Visa att A är inverterbar om A är radekvivalent med identitetsmatrisen (3p) (obs ! notera att du inte behöver visa ekvivalens utan bara implikation åt ena hållet).

Bevis: Se Sats 2.2.7, sid 125, i Lay.