Tentamen

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

160402 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Edvin Wedin, telefon: ankn 5325

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. Ej heller miniräknare.

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 11-13, MV:s exp.

---

1. (a) Beräkna undersumman $L(f, P_4)$ till integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$, där $f(x) = x^2$ och P_4 betecknar partitionen av $[0, 1]$ i fyra lika stora delintervall. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-4}{x^3+4x}\,dx$ (3p)

2. (a) Visa att $y = 1/x$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = \frac{13x^2 + 4x + 2}{x^3}$$

och bestäm sedan alla andra lösningar. (4p)

(b) Lös integralekvationen $y(x) = x - \displaystyle\int_2^x \frac{y(t)}{t}\,dt$ (4p)

3. En vattentank har formen av en cirkulär cylinder med radie 4 meter och höjden 9 meter. Antag att det går hål i botten på tanken och vattnet strömmar ut med en hastigheten som är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet i tanken (Torricellis lag). Om vattendjupet efter t minuter är $h(t)$ meter så följer det att;

$$h'(t) = k\sqrt{h(t)}$$

för någon proportionalitetskonstant k (ty mängden vatten är i detta fall proportionell mot vattendjupet). Antag att tanken från början är helt full med vatten och att vattendjupet efter 30 minuter är 4 meter. Hur lång tid tar det då innan tanken är helt tömd på vatten? (5p)

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -5 & 1 & h \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) För vilka h och k har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen, unik, respektive oändligt många lösningar. (3p)

(b) Använd Cramers regel för att bestämma den unika lösningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $h = k = 0$. (3p)

VÄND!

5. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ och låt T vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som är sådan att $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$ och $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e_2}$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

(a) skriv $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och bestäm sedan $T(\mathbf{v})$. (3p)

(b) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. (3p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en diagonalisering av A. (3p)

(b) Bestäm $\mathbf{x}_{100}$ då $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
(obs! tal på formen a^{100} behöver inte beräknas)

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en ortogonal bas till nollrummet för A. (3p)

(b) Bestäm den vektor i A:s nollrum som har minst avstånd till vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
Beräkna också detta minimala avstånd. (3p)

8. (a) Bevisa att $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ (3p)

(b) Formulera och bevisa De Moivre's sats/formel. (3p)

Lycka till!

Thomas W

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$