Lösningsförslag till tentamen

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

160402 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: , telefon:

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. Ej heller miniräknare.

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) Beräkna undersumman $L(f, P_4)$ till integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$, där $f(x) = x^2$ och P_4 betecknar partitionen av $[0, 1]$ i fyra lika stora delintervall. (3p)

Lösning: $P_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ dvs. $x_k = \frac{k}{4}, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Funktionen $f(x) = x^2$ är växande på varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ och antar därför sitt minsta värdet i den vänstra ändpunkten på respektive delintervall dvs. i $m_k = x_{k-1}$. Vi får då att;

$$L(f, P_4) = \sum_{k=1}^{4} f(m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{k-1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{4^3}\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right) = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

Svar: $L(f, P_4) = 7/32$

(b) Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 - 4}{x^3 + 4x}\,dx$ (3p)

Lösning: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-4}{x^3+4x}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2-4}{x(x^2+4)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x}\right) dx =$

$$= \left[\ln|x^2 + 4| - \ln|x|\right]_1^2 = \ln 8 - \ln 2 - \ln 5 = \ln\frac{4}{5}$$

Svar: $\ln(4/5)$

2. (a) Visa att $y = 1/x$ är en lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 13y = \frac{13x^2 + 4x + 2}{x^3}$$

och bestäm sedan alla andra lösningar. (4p)

Lösning: Om $y = 1/x$ så är $y' = -1/x^2$ och $y'' = 2/x^3$ och därmed

$$y'' - 4y' + 13y = \frac{2}{x^3} - 4\left(\frac{-1}{x^2}\right) + 13\frac{1}{x} = \frac{13x^2 + 4x + 2}{x^3}$$

Karakteristiska ekvationen till motsvarande homogena ekvation är $r^2 - 4r + 13 = 0$, som har lösningarna $r = 2 \pm 3i$, varpå det följer att...

Svar: den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \frac{1}{x}$$

(b) Lös integralekvationen $y(x) = x - \displaystyle\int_2^x \frac{y(t)}{t}\,dt$ (4p)

Lösning: Deriverar vi båda led får vi den linjära differentialekvationen $y' = 1 - \dfrac{y}{x}$

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow xy' + y = x \Leftrightarrow (xy)' = x \Leftrightarrow xy = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Från integralekvationen avläser vi att en lösning måste uppfylla $y(2) = 2$, varpå vi får att $C = 2$ och därmed;

Svar: $y(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$

3. En vattentank har formen av en cirkulär cylinder med radie 4 meter och höjden 9 meter. Antag att det går hål i botten på tanken och vattnet strömmar ut med en hastigheten som är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet i tanken (Torricellis lag). Om vattendjupet efter t minuter är $h(t)$ meter så följer det att;

$$h'(t) = k\sqrt{h(t)}$$

för någon proportionalitetskonstant k (ty mängden vatten är i detta fall proportionell mot vattendjupet). Antag att tanken från början är helt full med vatten och att vattendjupet efter 30 minuter är 4 meter. Hur lång tid tar det då innan tanken är helt tömd på vatten? (5p)

Lösning: Differentialekvationen $h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ är separabel och vi får att

$$h' = k\sqrt{h} \Leftrightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = kdt \Leftrightarrow \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int kdt \Leftrightarrow 2\sqrt{h} = kt + C$$

Av texten i uppgiften framgår att $h(0) = 9$ vilket innebär att $C = 6$. Vidare framgår det också av texten att $h(30) = 4$ vilket innebär att $4 = 30k + C$, så $k = -1/15$. Således är

$$h(t) = (3 - t/30)^2$$

Speciellt får vi att $h(t) = 0$ då $3 - t/30 = 0$ dvs. $t = 90$

Svar: 90 minuter

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -5 & 1 & h \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} k \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) För vilka h och k har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen, unik, respektive oändligt många lösningar. (3p)

Lösning: Radelimination på systemets utvidgade koefficientmatris ger att;

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ -5 & 1 & h & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & k \\ 0 & -13 & 2h-20 & 5k-4 \\ 0 & 0 & 2h-10 & 4k-6 \end{bmatrix}$$

Här avläser vi att det blir unik lösning om $2h - 10 \neq 0$ dvs då $h \neq 5$. Om $h = 5$ blir det oändligt många lösningar om också $4k - 6 = 0$ dvs då $k = 3/2$, och i annat fall inga lösningar alls.

Svar: Unik lösning då $h \neq 5$, oändligt många lösningar då $h = 5$ och $k = 3/2$, inga lösningar då $h = 5$ och $k \neq 3/2$.

(b) Använd Cramers regel för att bestämma den unika lösningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $h = k = 0$. (3p)

Lösning: Om $h = k = 0$ så är;

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -4\underbrace{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{-26} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}_{-13} = 65$$

Cramers regel ger sedan att;

$$x_1 = \frac{1}{65}\begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{65}\left(-4\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}_{-9} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}_{-6}\right) = \frac{18}{65}$$

$$x_2 = \frac{1}{65}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{65}\left(-4\underbrace{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{7} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}_{-4}\right) = \frac{-40}{65} = \frac{-8}{13}$$

$$x_3 = \frac{1}{65}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{65}\left(2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}_{9} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{7}\right) = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}$$

Svar: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 18/65 & -8/13 & 3/5 \end{bmatrix}^T$

5. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ och låt T vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som är sådan att $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$ och $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e_2}$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

(a) skriv $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och bestäm sedan $T(\mathbf{v})$. (3p)

Lösning:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

så $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$ och speciellt följer att;

$$T(\mathbf{v}) = T(\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2) = \frac{3}{2}T(\mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}T(\mathbf{v}_2) = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svar: $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$ och $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}^T$

(b) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. (3p)

Lösning: Om A är standardmatrisen för avbildningen T så är;

$$\begin{cases} A\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 \\ A\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: Standardmatrisen för avbildningen T är $\frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Låt $A = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en diagonalisering av A. (3p)

Lösning: Vi har

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -11-\lambda & 7 \\ -14 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda+4)(\lambda-3)$$

så A har egenvärdena $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 3$.
För var och en av dessa egenvärden bestämmer vi sedan tillhörande egenvektorer;

$\lambda_1 = -4: \ A + 4I = \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; Egenvektorer: $s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 3: \ A - 3I = \begin{bmatrix} -14 & 7 \\ -14 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; Egenvektorer: $s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$

så vi får att;

Svar: $A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Bestäm $\mathbf{x}_{100}$ då $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (4p)
(obs! tal på formen a^{100} behöver inte beräknas)

Lösning:

$$\mathbf{x}_{100} = A^{100}\mathbf{x}_0 = PD^{100}P^{-1}\mathbf{x}_0 = PD^{100}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^{100} + 2 \cdot 4^{100} \\ -2 \cdot 3^{100} + 2 \cdot 4^{100} \end{bmatrix}$$

Svar: $\mathbf{x}_{100} = \begin{bmatrix} -3^{100} + 2 \cdot 4^{100} \\ -2 \cdot 3^{100} + 2 \cdot 4^{100} \end{bmatrix}$

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en ortogonal bas till nollrummet för A. (3p)

Lösning: Radreducering på totalmatrisen för systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ger;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$$

Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är uppenbart linjärt oberoende och bildar därför en bas för nollrummet till A. Med Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod erhåller vi sedan en ortogonal bas för nollrummet;

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Svar: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T$ bildar en ortogonal bas för nollrummet till A.

(b) Bestäm den vektor i A:s nollrum som har minst avstånd till vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Beräkna också detta minimala avstånd. (3p)

Lösning: Den sökta vektorn är ortogonala projektionen av $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på nollrummet och kan beräknas genom;

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Det sökta avståndet ges då av $||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| = ||\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T|| = \sqrt{15}/5$

Svar: Den sökta vektorn är $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T$och det minimala avståndet är $\sqrt{15}/5$.

8. (a) Bevisa att $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ (3p)

(b) Formulera och bevisa De Moivre's sats/formel. (3p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$