Tentamen

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf (Omtenta, med lösningar)

170819 kl. 8.30–12.30

Examinator: Daniel Persson , Institutionen för Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Adam Malik , telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. Ej heller miniräknare.

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningar. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) Beräkna följande obestämda integral med hjälp av trigonometrisk variabelsubstitution

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

(3p)

Lösning: Vi substituerar

$$x = 3\sin\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta. \tag{1}$$

Insättning i integralen ger

$$\int \frac{9\sin^2\theta(3\cos\theta\, d\theta)}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} = 9\int \frac{\sin^2(3\cos\theta)d\theta}{3\sqrt{1-\sin^2\theta}}. \tag{2}$$

Vi kan nu använda den trigonometriska ettan i nämnaren vilket ger

$$9\int \frac{\sin^2(3\cos\theta)d\theta}{3\cos\theta} = 9\int \sin^2\theta\, d\theta. \tag{3}$$

För att beräkna den återstående integralen använder vi formeln för dubbla vinkeln $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$. Detta ger det slutgiltiga svaret

$$9\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\int (1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C. \tag{4}$$

(b) Beräkna följande integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}.$$

(3p)

Lösning: Vi börjar med att partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}. \tag{5}$$

Integralen blir då

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) &= [\ln(x+1))]_0^1 - [\ln(x+2)]_0^1 \\ &= \ln 2 - 0 - \ln 3 + \ln 2 \\ &= \ln\frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Låt $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, vara en parametrisk beskrivning av kurvan C.

(a) Beräkna längden av C. (3p)

Lösning: Längden av kurvan ges av

$$\ell = \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt \tag{7}$$

Nu använder vi parametriseringen som är given i uppgiften vilket ger

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\,\cos t, \qquad \frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t\,\sin t. \tag{8}$$

Insättning i integralen leder till

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\sin^2 t\,\cos t)^2 + (-3\cos^2 t\,\sin t)^2}dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t\,\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt. \tag{9}$$

Vi kan nu använda den trigonometriska ettan för att göra oss av med rottecknet:

$$\ell = 3\int_0^{\pi/2} \cos t\,\sin t\,dt. \tag{10}$$

I nästa steg använder vi oss av följande formel för dubbla vinkeln: $\sin 2t = 2\sin t\,\cos t$. Detta ger

$$\ell = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = \left[-\frac{3}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = 3/2. \tag{11}$$

(b) Beräkna arean av den yta som bildas om kurvan C roteras runt x-axeln. (3p)

Lösning: Ytarean för rotation runt x-axeln ges av

$$A = 2\pi \int_C y ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt. \tag{12}$$

Nu använder vi oss formeln för ds som vi fann i (a)-uppgiften. Uttrycket för arean kan då skrivas som

$$A = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \, 3 \, \cos t \, \sin t \, dt = 6\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, \cos t \, dt. \tag{13}$$

För att beräkna integralen gör vi substitutionen

$$u = \sin t, \qquad du = \cos t \, dt, \tag{14}$$

och de nya gränserna blir $u = \sin 0 = 0$ samt $u = \sin \pi/2 = 1$. Integralen kan då skrivas

$$A = 6\pi \int_0^1 u^4 \, du = 6\pi \left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6\pi}{5}. \tag{15}$$

3. (a) Lös följande ODE med givet begynnelsevillkor (3p)

$$\begin{cases} y'(x) = e^{x+2y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösning: Vi börjar med att skriva ut ekvationen lite mer explicit:

$$\frac{dy(x)}{dx} = e^x \, e^{2y}. \tag{16}$$

Denna ekvation är separabel och vi kan därför dela upp den och integrera båda sidor:

$$\int e^{-2y} dy = \int e^x dx. \tag{17}$$

Detta ger

$$-\frac{1}{2} e^{-2y} = e^x + C. \tag{18}$$

För att bestämma konstanten C sätter vi in begynnelsevillkoret $y(0) = 0$:

$$-\frac{1}{2} e^0 = e^0 + C, \tag{19}$$

vilket ger

$$C = -\frac{3}{2}. \tag{20}$$

Med detta värde kan vår ekvation skrivas som

$$e^{-2y} = -2e^x + 3. \tag{21}$$

För att lösa ut y tar vi logaritmen av båda sidor vilket ger slutligen lösningen

$$y(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(3 - 2e^x\right). \tag{22}$$

(b) Finn alla lösningar till ekvationen (4p)

$$y''(x) + 4y(x) = \cos(2x)$$

Lösning: Vi löser först den homogena ekvationen $y''(x) + 4y(x) = 0$. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + 4 = 0 \tag{23}$$

med imaginära lösningar $r = \pm i2$. Den mest allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför

$$y_h(x) = A\cos 2x + B\sin 2x. \tag{24}$$

För att hitta en partikulärlösning måste vi göra en ansats. Eftersom högerledet involverar $\cos 2x$ är det naturligt att ta med denna funktion i ansatsen. Men då samma funktion även finns med i den homogena lösningen måste vi modifera ansatsen något. Vi testar med

$$y_p(x) = C_1 x\sin 2x + C_2 x\cos 2x. \tag{25}$$

och deriverar två gånger, vilket ger

$$y_p''(x) = -4(C_2 + C_1 x)\sin 2x + 4(C_1 - C_2 x)\cos 2x. \tag{26}$$

När vi sätter in denna ansats i den ursprungliga ekvationen noterar vi direkt att termerna som involverar $x\cos 2x$ samt $x\sin 2x$ kancellerar och vi har kvar

$$-4C_2\sin 2x + 4C_1\cos 2x = \cos 2x. \tag{27}$$

Denna ekvation är uppfylld endast för

$$C_1 = \frac{1}{4}, \qquad C_2 = 0. \tag{28}$$

Den mest allmänna lösningen är därför

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x. \tag{29}$$

4. Antag att g är en differentierbar funktion på intervallet $[a, b]$ samt att $g(a) = A$ och $g(b) = B$. Antag även att f är en kontinuerlig funktion på värdemängden av g. Visa att

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_A^B f(u)du.$$

Detta är Sats 5.6.6 (variabelsubstitution i en integral). (4p)

Lösning: Se boken.

5. Antag att A är en $n \times n$ matris. I kursen gav vi fler än 10 olika egenskaper som är ekvivalenta med påståendet "A är inverterbar". Ange 5 sådana egenskaper. (2.5p)

Lösning: Se Sats 2.3.8 (sid. 114) i boken.

6. Låt (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla egenvärden (inklusive multiplicitet) och egenvektorer till A.

Lösning: Vi börjar med att ställa upp det karakteristiska polynomet:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0, \tag{30}$$

dvs

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)((-5-\lambda)(1-\lambda)+9) + 3(3(1-\lambda)-9) + 3(-9-3(-5-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) - 3(3\lambda+6) + 3(3\lambda+6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+2)^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Vi ser att ekvationen har två lösningar och vi har därför två distinkta egenvärden

$$\lambda = 1 \,(\text{multiplicitet}\, 1), \qquad \lambda = -2 \,(\text{multiplicitet}\, 2). \tag{32}$$

För att hitta egenvektorerna löser vi motsvarande matrisekvationer. Vi startar med $\lambda = 1$:

$$(A - \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{33}$$

vilket ger totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Denna ekvation har därför lösning:

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Som egenvektor till $\lambda = 1$ väljer vi därför

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Nu studerar vi motsvarande ekvation för det andra egenvärdet $\lambda = -2$:

$$(A + 2\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{37}$$

med totalmatris

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Lösningen är

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Tillhörande egenvärdet $\lambda = -2$ (med multiplicitet 2) har vi således följande egenvektorer

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

7. (a) Lös ekvationssystemet genom att skriva det som en matrisekvation och radreducera: (3p)

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 5 \\ y - z + 2w &= 8 \\ 2x - y - 3z + 4w &= 18. \end{aligned}$$

Lösning: Vi ställer upp totalmatrisen och radreducerar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 18 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Vi ser att w är en fri variabel och på parametrisk vektorform tar lösningen följande form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser för nollrummet till A samt kolonnrummet till A. (5p)

Lösning: Vi börjar med att radreducera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Vi ser att 1:a, 2:a och 3:e kolonnerna är pivotkolonner. Detta ger oss direkt en bas till kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$, nämligen

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{44}$$

När det gäller nollrummet så måste vi studera rummet av lösningar till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi har ju redan radreducerat A till reducerad trappstegsform från vilken vi läser av att x_3 samt x_5 är fria variabler. Lösningen ges då på parametrisk vektorform av

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}. \tag{45}$$

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är linjärt oberoende och utgör därför en bas för $\mathrm{Nul}(A)$, dvs

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{46}$$

8. (a) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär transformation så att

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i. Bestäm standardmatrisen för transformationen T. (2p)

Lösning: Standardmatrisen för en avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}, \tag{47}$$

där

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

I uppgiften har vi redan fått $T(\mathbf{e}_1)$ samt $T(\mathbf{e}_2)$ så det återstår att ta reda på $T(\mathbf{e}_3)$.

Vi noterar nu att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \tag{49}$$

och eftersom det är en linjär transformation kan vi dra slutsatsen att

$$T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Standardmatrisen blir således

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

ii. Är transformationen T injektiv? (1.5p)

Lösning: Radreducering ger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Eftersom den reducerade trappstegsformen har en nollrad så finns det oändligt många lösningar och således är transformationen T *inte injektiv*.

(b) För vilket eller vilka värden på h är vektorerna (3p)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ h \end{pmatrix}$$

linjärt beroende?

Lösning: Vektorerna är linjärt oberoende om motsvarande homogena matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där kolonnerna i A utgörs av vektorerna, har oändligt många lösningar. Vi radreducerar därför totalmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & h & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1+h & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3+h & 0 \end{pmatrix}.$$

Från detta kan vi direkt dra slutsatsen att det finns en fri variabel, och således oändligt många lösningar, endast om $h = -3$. Vektorerna är således linjärt beroende för detta värde på h.

9. Låt A vara en $m \times n$ matris, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c en skalär. Visa att då gäller:

$$\begin{aligned} &(1) \quad A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}; \\ &(2) \quad A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Detta är Sats 1.4.5 i Lay. (4p)

Lösning: Se boken.

Lycka till !
/Daniel P

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x+a}\, dx = \ln|x+a|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|\ , \quad a \neq 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

Uttryck i integranden	**Substituera**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot sin(\theta),\ \ x = a \cdot cos(\theta)$
$\sqrt{a^2+x^2},\ \frac{1}{a^2+x^2}$	$x = a \cdot tan(\theta)$

Förskjutningsregeln

Om[1]

$$P(D)y = y'' + ay' + by, \text{ dvs } P(D) = D^2 + aD + b$$

så är

$$P(D)z(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} P(D+\alpha) z(x)$$