MATEMATIK
Chalmers
Kursansvarig: Alexei Heintz

Datum: 2018-01-13 Tid: eftermiddag (kl 14.00-18.00)
Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Telefonvakt: Carl Lundholm ankn. 6792

Tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

   a) Beräkna $\int x \sin^2(x) dx$. **(2p)**

   b) Beräkna $\int_0^2 \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}$. **(3p)**

2. **Tillämpningar av integraler**.

   a) Beräkna arean av figuren i halvplanet $x \geq 0$ som är begränsad av två linjer: cirkeln $x^2 + y^2 = 16$ och parabeln $y^2 = 6x$. **(4p)**

   Tips: Det är lämpligt att använda variabelbytet av typ $x = a \sin(t)$ i en av integraler som uppstår.

   b) Beräkna arean av rotationsytan som är byggd med rotation av grafen till funktionen $y = \sin(x)$ för $x \in [0, \pi]$ runt x - axeln. **(3p)**

3. **Differentialekvationer.**

   a) Lös begynnelsevärdesproblemet: $y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $y(0) = 0$. **(3p)**

   b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$. **(3p)**

4. **Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system.**

   Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$.

   a) Bestäm dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ och dimensionen av nollrummet $Null(A)$ till A. **(2p)**

   b) Bestäm om $\mathbf{b}$ hör till kolonnrummet $Col(A)$ till A. **(2p)**

   c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas till dess nollrummet $Null(A^T)$. **(2p)**

   d) Använd basen till $Null(A^T)$ och Fredholm satsen för att bevisa att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

5. **Linjära transformationer.**

   Ange standard matris till linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först spegling i linjen $x = y$ i planet och sedan rotation moturs runt origo i vinkel $\pi/3$. **(4p)**

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

   a) Bestäm om matriser $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, och $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, kan diagonaliseras och i så fall ange motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. **(4p)**

   b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning och skissa fasportrett.

   Bestäm lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$. **(4p)**

7. **Skalär produkt, ortogonalitet, projektion. Symmetriska och ortogonala matriser.**

   Betrakta symmetrisk matris $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Hitta en ortogonal matris som transformerar matrisen A till en diagonal matris. **(3p)**

   b) Ange spektral dekomposition av matrisen A. **(3p)**

8. **Sats.**

   Formulera och bevisa integralkalkulens huvudsats. **(6p)**

Maxpoäng på tentan är 50.
Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är: **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40

Formelblad

Trigonometri

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y);$

$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x);$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos x(x-y) + \cos(x+y)\right);$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos x(x-y) - \cos(x+y)\right);$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right);$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)};$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2};$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2};$$

Binomialsatsen (lämpliga speciella fall)

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1-k)}\, b^k;$$

T.ex. är

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$