MATEMATIK
Chalmers
Kursansvarig: Alexei Heintz

Datum: 2018-04-04 Tid: förrmiddag (kl 8.30-12.30)
Hjälpmedel: inga. **Mobiltelefoner är förbjudna.**
Telefonvakt: Henrik Imberg ankn. 5325

Lösningsförslag till tenta i MVE465 Linjär algebra och analys fortsättning. K/Bt/Kf

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

1. **Integraler och primitiva funktoner.**

a) Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ **(3p)**

Lösningsförslag:

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{\sqrt{1+x^2}}d\left(x^2+1\right) =$
$\frac{1}{2}\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int \sqrt{y}dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{2}{3}\frac{1}{2}y^{3/2} - y^{1/2} = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1};$
$\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left(\frac{1}{3}x^2\sqrt{x^2+1} - \frac{2}{3}\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$

Svar: $\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$ **(3p)**

Lösningsförslag:

Gör partiellbråksuppdelning: $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{\left(A+Cx+Ax^2+Bx^2\right)}{(x^2+1)x}$

Kräver att koefficienterna framför samma potenser av x är lika i vänster och i höger: $A=1$; $C=0$; $A+B=0$; medför $B=-1$. Man kan också gissa det svaret direkt från formeln.

$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

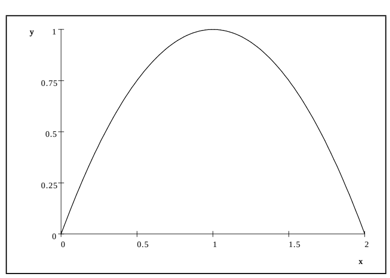
Svar: $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

2. **Tillämpningar av integraler**.

a) Beräkna volumen av rotationskroppen som är byggd då figuren begränsad av parabeln $y = 2x - x^2$, och intervall $[0,2]$ på x - axeln, roteras runt y - axeln. **(3p)**

Lösningsförslag:

Bilden på roterande figuren:



Formeln för volum med hjälp av cylindriska skal:

$$\begin{aligned}
Volum &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx = \\
2\pi \int_0^2 x\left(2x - x^2\right) dx &= \\
2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx &= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\bigg|_{x=0}^2 = 2\pi \left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{1}{4}2^4\right) \\
&= 2\pi \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = 32\pi \frac{4-3}{12} = \pi \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Svar: $Volum = \pi \frac{8}{3}$.

b) Bestäm om arean mellan grafen till funktionen $f(x) = |x| \exp(-x^2)$ och x - axeln är begränsad och beräkna den i så fall. **(3p)**

Lösningsförslag:

$$Arean = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-x^2) dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |x| \exp(-x^2) dx = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R x \exp(-x^2) dx =$$

$$2 \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \int_0^R \exp(-x^2) d\left(-x^2\right) = 2 \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \exp(-x^2)\bigg|_{x=0}^R =$$

$\lim_{R\to\infty} (1 - \exp(-R^2)) = 1$

Svar: Arean är begränsad och är lika med 1.

3. **Differentialekvationer.**

a) Lös begynnelsevärdesproblemet: $x'(t) = t \cdot x^3$; $x(0) = 1/2$. Bestäm tidsintervall då den lösningen gäller. **(3p)**

Lösningsförslag:

Ekvationen $\frac{dx}{dt} = t \cdot x^3$ har separabla variabler.

$\frac{dx}{x^3} = t\,dt$; $\int \frac{dx}{x^3} = \int t\,dt$; $-\frac{1}{2x^2} = \frac{t^2}{2} + \frac{C}{2}$; $-\frac{1}{x^2} = t^2 + C$, där C är en godtycklig konstant.

Vi använder begynnelsevillkoret för $t = 0$ för att bestämma konstanten C: $C = -4$.

$-\frac{1}{x^2} = t^2 - 4$ och $x^2(t) = \frac{1}{4-t^2}$.

Svar: $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$. Lösningen gäller på öppna intervallet $(-2, 2)$.

b) Ange allmän lösning till ekvationen $y'' - 4y = \exp(2x)$. **(3p)**

Lösningsförslag:

$y'' - 4y = \exp(2x)$,

Allmän lösning den ekvationen är summa af allmän lösning $y_h(x)$ till homogena ekvationen $y'' - 4y = 0$ och en partikulär lösning $y_p(x)$ till inhomogena ekvationen. För att hitta y_h betraktas karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

Den har rötter $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -2$ som medför att $y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$.

Vi har i högerledet av ekvationen en exponent som sammanfaller med en lösning till homogena ekvationen, nämligen e^{2x}. Detta gör att partikulär lösning till inhomogena ekvationen kan sökas på formen $y_p(x) = Bxe^{2x}$ med okända koefficienten B. Vi sätter uttrycket för y_p in i ekvationen och söker B så att Bxe^{2x} uppfyller ekvationen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{2x}Bx\right] - 4e^{2x}Bx = e^{2x}$$

$\frac{d}{dx}\left(Bxe^{2x}\right) = Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(Bxe^{2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(Be^{2x} + 2Bxe^{2x}\right) = 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$

$$\begin{aligned} 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 4Bxe^{2x} &= e^{2x} \\ 4Be^{2x} &= e^{2x} \\ 4B &= 1; \quad B = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Svar: Allmän lösning är: $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$.

4. **Rank, kolonnrum, nollrum. Lösbarhet av linjära system.**

Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$, och vektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Bestäm om systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart. **(2p)**

b) Bestäm bas och dimension av kolonnrummet $Col(A)$. **(2p)**

c) Betrakta transponat A^T av A och ange en bas och dimension av dess nollrumm $Null(A^T)$. **(3p)**

d) Bestäm om vektorn b är ortogonal till $Null(A^T)$. **(1p)**

Lösningsförslag:

a) Vi genomför Gausselimination på utvidgade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och får et matris på trappstegsform som svarar ekvationssystemet där tredje ekvation ser ut som $0 = 2$ och kan inte lösas. Det betyder att systemet är olösbart.

b) Vi observerar från samma beräkning, att bara två första kolonner i matrisen A är pivot kolonner. Detta medför att två första kolonner i matrisen A utgör basen till kolonnrummet $Col(A)$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ Dimensionen av kolonnrummet $Col(A)$ är två - lika med antal vektorer i en bas.

c) Transponat till matrisen A är

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tillbaka substitution ger reducerad trapp-stegsform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser att homogena systemet met matrisen A^T har två fria variabler. Dimentionen av nollrummet $Null(A^T)$ är då lika med två. Vi får fram en bas till nollrummet med lämpliga val av fria variabler $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ och $x_3 = 0$ och $x_4 = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) Beräknar skalärprodukten

$v_1 \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ och ser att vektorn b är inte ortogonal till en vektor i $Null(A^T)$. Då är den inte ortogonal till $Null(A^T)$ heller. Man kunde göra samma slutsats från svaret i punkten a) med att referera till ett av kriterier för lösbarhet av linjära ekvationssystem.

5. **Linjära transformationer.**

Ange standardmatris till linjär transformation från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som utgör först rotation medurs runt origo i vinkel $30°$, och sedan spegling i x - axeln i planet. **(3p)**

Lösningsförslag:

Enklaste sättet att lösa problemet är att tillämpa satsen om standartmatris till en linjär transformation T. Betrakta $T(e_1)$ och $T(e_2)$ för givna transformationen där $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Standardmatrisen har kolonner $T(e_1)$ och $T(e_2)$.

Efter rotationen medurs i $30°$ (rotation i vinkeln $-30°$) avbildas vektorn e_1 till vektorn $\begin{bmatrix} \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Speglin i x -axeln ger vektorn $T(e_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Efter rotationen medurs i $30°$ (rotation i vinkeln $-30°$) avbildas vektorn e_2 till vektorn $\begin{bmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Speglin i x -axeln ger vektorn $T(e_2) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

Svar: Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

6. **Egenvektorer, egenvärden, diagonalisering. System linjära ODE.**

a) Bestäm om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ kan diagonaliseras, och i så fall ange motsvarande diagonalmatris och transformationsmatris. Kan man svara på första frågan utan att beräkna egenvektorer? Vilken speciell egenskap har egenvektorer till den matrisen?

(4p)

Lösningsförslag:

En symmetrisk matris (A är symmetrisk) är alltid diagonaliserbar. Så svaret på första frågan är ja.

Betrakta karakteristiskt polynom till A. Det har enkel form för en 2×2 matris: $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \mathrm{tr}(A) + \det(A) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Egenvärden är $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$ och är olika.

Egenvektorer som hör till olika egenvärden är alltid linjärt oberoende. I fall med symmetriska matriser är de även ortogonala mot varandra.

Matrisen 2×2 med två linjärt oberoende egenvektorer kan diagonaliseras (enligt ett nödvändigt och tillräckligt villkor). Det är andra sätt att svara på första frågan utan att beräkna egenvektorer.

Diagonalmatrisen similär till A är $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Egenvektorer satisfierar ekvationer

$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ för $\lambda_1 = -1$, och $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ för $\lambda_2 = 5$

Eigenvektorer kan väljas som : $v_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \lambda_1 = -1$, $v_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \lambda_2 = 5$.

Vi ser att de är ortogonala mot varandra: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

Transformationsmatrisen $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ med egenvektorer som kolonner, transformerar matrisen A i similära diagonala matrisen D och upfyller relationen $P^{-1}AP = D$.

b) Betrakta systemet ODE: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Ange allmän lösning till systemet ODE och bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(4p)**

Lösningsförslag:

Allmän lösning har formen (vi använder här egenvektorer och egenvärden som vi beräknat innan)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \\ x(t) &= C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfierar ekvationen

$$C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eller C_1 och C_2 satisfierar ekvationessystemet med utvidgade matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi löser det med hjälp av Gausselimination:

$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$C_1 = -1$, $C_2 = 2$

Lösningen som satisfierar begynnelsevillkoret är:

$$y(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. **Skalär produkt, projektion, Gram - Schmidt metoden**

Bestäm en ortogonal bas till spannet av följande vektorer:

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(3p)**

Lösningsförslag:

Man kan (inte obligatoriskt här) genomföra Gausselimination på matrisen

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ för att se att givna tre vektorer är linjärt oberoende, men det skall till slut synas också från Gram - Schmidt beräkning.

Det är lätt att se at två första givna vektorer är ortogonala: $v_1 \cdot v_2 = 0$. Det räcker då att tillämpa Gram - Schmidt metoden bara på tredje vektor v_3 för att hitta tredje vektor för ortogonala basen. Den tredje basvektor kommer att uttryckas som

$$v_3 - \mathrm{Pr}_W(v_3)$$

där $\mathrm{Pr}_W(v_3)$ är projektionen av v_3 på spannet W av v_1 och v_2 :

$$\mathrm{Pr}_W(v_3) = \frac{(v_1, v_3)}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{(v_2, v_3)}{\|v_2\|^2} v_2$$

$(v_1, v_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$; $(v_2, v_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2$; $\|v_1\|^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$ 4; $\|v_2\|^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4$;

$$\mathrm{Pr}_W(v_3) = \frac{(v_1, v_3)}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{(v_2, v_3)}{\|v_2\|^2} v_2 = \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Komponentet of v_3 orogonalt mot W (både mot v_1 och mot v_2 som är ortogonala mot varandra) är

$$v_3 - \mathrm{Pr}_W(v_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och är inte noll. Detta medför att spannet av v_1, v_2 och v_3 har dimension 3 och har vektorer v_1, v_2 och $v_3 - \mathrm{Pr}_W(v_3)$ som ortogonal bas.

8. **Minstakvadratmetoden.**

Anpassa följande experimentella data för x och y:

$$\begin{bmatrix} x\colon & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y\colon & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

med en rät linje: $y = b + ax$ - med hjälp av minstakvadratmetoden.

(4p)

Lösningsförslag:

Vi vill att parametrar a och b skulle uppfylla följande ekvationssystem:

$\begin{cases} b + a \cdot 0 = 2 \\ b + a \cdot 1 = 1 \\ b + a \cdot 2 = 2 \\ b + a \cdot 3 = 4 \end{cases}$ som är ekvivalent med följande system på matris form: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

med matris $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, högerledet $g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ och okända vektorn $x = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$

Systemet är tydligen olösbart (för många ekvationer) och vi söker en minstakvadratlösning $\widehat{x}$ istället. Vi betraktar normalekvationen

$$A^T A \widehat{x} = A^T g$$

som ger minstakvadratlösningen $\widehat{x}$. Den är projektionen av g på $Col(A)$. Vi beräknar termer i den ekvationen:

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Utvidgade matrisen som svarar mot normnalekvationen $\left(A^TA\right)\widehat{x} = A^Tg$

är $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 14 & 17 \end{bmatrix}$.

Man kan tillämpa Cramers regel för att få fram lösning till ekvatiossystemet med två okända variabler.

$\det A^TA = \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} = 20$; $\det \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 14 \end{bmatrix} = 24$; $\det \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 17 \end{bmatrix} = 14$

$\widehat{x}_1 = b = \dfrac{24}{20} = \dfrac{6}{5}$; $\widehat{x}_2 = a = \dfrac{14}{20} = \dfrac{7}{10}$.

Vi kan också tillämpa Gauss elimination på samma problem: $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 6 & 14 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 - \frac{42}{10} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{24}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$

Den ger minstakvadratlösning: $b = \dfrac{6}{5}$ och $a = \dfrac{7}{10}$

Svar. Linjär minstakavadratapproximation av givna experimentella data är $y = \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{10}x$.

9. **Sats.**

Formulera och bevisa satsen om standardmatris till en linjär transformation. **(6p)**

Kolla beviset i Lay.
Maxpoäng på tentan är 50.
Betyggränser för poäng på tentamen, inklusive eventuella bonuspoäng är:
3: 20; **4:** 30; **5:** 40