Övningstentamen 1

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: ...

Hjälpmedel: Miniräknare är ej tillåtet

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) [$131219-2b$] Bestäm $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ (4p)

(b) [$131219-2c$] Visa att $\int_0^1 \tan\sqrt{x}\,dx \le \frac{1}{2}\left(\tan\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan 1\right)$ (4p)

2. (a) [$140822-3a$] Lös begynnelsevärdesproblemet; (4p)

$$\begin{cases} y'(t)+2ty(t)-t=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(b) [$140822-3c$] Bestäm alla lösningar till differentialekvationen; (4p)

$$x''(t)+2x'(t)+x(t)=2\sin t$$

3. [Exercise 3.4.27] Om ett objekt i ett rum värms upp från $5°C$ till $10°C$ på 4 minuter, och om rummet hela tiden håller temperaturen $20°C$, hur länge till dröjer det i så fall tills objektet har temperaturen $15°C$? Antag att objektet värms upp med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan objektets temperatur och det omgivande rummets temperatur. (4p)

4. [$140424-1$] Låt $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Visa att kolonnerna i A är linjärt oberoende. (4p)

(b) Vilken rang har A och vilken dimension har nollrummet till A? (2p)

(c) Bestäm en 4×4-matris C sådan att rangen för matrisen $A-C$ är 3. (3p)

5. [Exercise 2.2.31] Låt $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Avgör om A är inverterbar och bestäm i så fall dess invers. (4p)

VÄND!

6. [140310 – 4] Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(a) A har egenvärdena 6 och 0. Bestäm respektive egenvektorer. (3p)

(b) Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Bestäm i så fall en sådan. (3p)

7. [120901 – 5*b*] Betrakta de fyra punkterna $(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, a)$, där a är en reell parameter. Visa att den linje $y = kx + l$ som bäst ansluter till de givna punkterna i minstakvadratmetodens mening alltid går genom punkten $(-1/3, 1/2)$ oavsett vilket värde man sätter på a. (5p)

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$