Övningstentamen 2

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: ...

Hjälpmedel: Miniräknare är ej tillåtet

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) [150821 − 2b] Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^4}\,dx$ (3p)

(b) [150115 − 3b] Bestäm $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$ (3p)

2. [140424 − 2b] Beräkna längden av kurvan $y = \ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, då $2 \le x \le 4$ (5p)

3. (a) [150413 − 3a] Lös differentialekvationen $y' = (1-y)(2-y)$ (4p)

(b) [150115 − 4a] Lös randvärdesproblemet; (4p)

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

4. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en avbildning med standardmatris på formen;

$$A = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) [131219 − 5a] Beräkna determinanten för A. (2p)

(b) [131219 − 5b] Låt $v = \frac{\pi}{4}$. Beräkna bilden av triangeln vars hörnpunkter ges av; (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) [131219 − 5c] Är avbildningen injektiv? (2p)

5. [150115 − 2] Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en bas för nollrummet till B. Bestäm även rangen för B. (4p)

(b) En permutationsmatris P är en (kvadratisk) matris som har precis en etta i varje rad och varje kolonn och vars övriga element är 0. Bestäm en permutationsmatris P sådan att; (3p)

$$BP = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 15 & 12 & 13 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

VÄND!

6. [120901 – 4] Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ har vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som egenvektor.

(a) Bestäm talet a och matrisens samtliga egenvärden och egenvektorer. (3p)

(b) För a i (a) lös följande begynnelsevärdesproblem;

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = [\ 1 \quad 0\ ]^T \end{cases}$$

. (3p)

7. [140825 – 5] Vektorerna $[\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$ och $[\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\ ]^T$ spänner upp ett underrum H i $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för H. (3p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $[\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]^T$ på H. (3p)

8. Formulera och bevisa satsen om substitution i bestämda integraler. (5p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$