Övningstentamen 3

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: ...

Hjälpmedel: Miniräknare är ej tillåtet

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) [140822 – 2a] Bestäm $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (3p)

(b) [140822 – 2b] Visa att integralen $\displaystyle 2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$ är divergent. (4p)

2. [Exercise 7.3.27] Bestäm arean av den rotationsyta som bildas då $y=\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{1}{x}$, då $1\le x\le 4$ roterar kring y-axeln. (4p)

3. (a) [140424 – 5b] Lös integralekvationen $\displaystyle y(x)=2+2\int_2^x ty(t)\,dt$ (4p)

(b) [140424 – 3a] Bestäm alla lösningar till differentialekvationen; (5p)

$$y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$$

(Tips: Det finns en partikulärlösning på formen $y_p=Axe^{-x}\cos x+Bxe^{-x}\sin x$)

4. [150821 – 4] Låt $S(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} x_1+x_2+1 \\ x_1-x_2\end{bmatrix}$ och $T(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$ vara två avbildningar.

(a) Avgör vilka av avbildningarna ovan som är linjära. (4p)

(b) Man har använt avbildningen T ovan för att beräkna bilden av en rektangel med höjden 2 och bredden 1, och med ett hörn i origo. Rita bilden och beräkna dess area. (4p)

5. [150413 – 1b] En $n\times n$-matris D sägs vara positivt definit om D är symmetrisk och om $\mathbf{x}^T D\mathbf{x}>0$ för alla $n\times 1$-vektorer $\mathbf{x}\neq 0$. Visa att följande matris är positivt definit om och endast om alla diagonalelement är positiva dvs, $d_i>0, i=1,2,...,n$. (4p)

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$$

VÄND!

6. [130315 – 4] Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm matrisens egenvärden. (2p)

(b) Undersök om det finns värden på c för vilka A är diagonaliserbar och ange för eventuella sådana c en matris P och diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (4p)

7. [110111 – 2] Låt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Verifiera att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ bildar en bas för $\mathbb{R}^2$. (3p)

(b) Beräkna koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ relativt basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ (3p)

8. Visa att den allmänna lösningen till en linjär och homogen differentialekvation med konstanta koefficienter av andra ordningen har formen $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$ då differentialekvationens karakteristiska ekvation har två olika reella rötter. (6p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$