Övningstentamen 4

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: ...

Hjälpmedel: Miniräknare är ej tillåtet

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) [130826 – $2b$] Bestäm $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,dx$ (4p)

(b) [150821 – $5ab$] Låt $e^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^x x^n\,dx, n = 0, 1, 2, \ldots$.
Visa att $I_0 = 1 - e^{-1}$ och att $I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$. (4p)

2. [140822 – $2c$] Beräkna volymen av den kropp som bildas då $y = 1/x,\ 1 \le x \le \infty$ roterar kring x-axeln. (3p)

3. (a) [Exercise 7.9.6] Lös differentialekvationen $\dfrac{dx}{dt} = e^x \sin t$. (4p)

(b) [Exercise 18.5.5] Visa att $y = e^{2t}$ är en lösning till differentialekvationen;

$$y''' - 2y' - 4y = 0$$

och bestäm sedan alla andra lösningar. (4p)

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ p \end{bmatrix}$, där p är ett reellt tal.

(a) [150821 – $1a$] För vilka p är systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart? (4p)

(b) [150821 – $1b$] Ange en vektor som inte kan skrivas som en linjärkombination av kolonnvektorerna i A. (3p)

5. [Exercise 3.3.6] Använd Cramers regel för att bestämma lösningen till ekvationssystemet; (4p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

VÄND!

6. [120110 − 3] Låt A vara en 2×2-matris för vilken vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer med respektive egenvärde $1/2$ och 1.

(a) Bestäm matrisen A. (4p)

(b) För varje positivt heltal n bestäm A^n samt gränsvärdet av A^n, då $n \to \infty$. (3p)

7. [120110 − 4]

(a) Anpassa med hjälp av minstakvadratmetoden en linje $y = kx + l$ till punkterna $(1, 2), (2, 4), (3, 5), (4, 7)$ (4p)

(b) Låt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Med hjälp av resultatet i (a) bestäm det $\mathbf{y}$ i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{b}$. (3p)

8. (a) Visa att $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$, för alla matriser A, B och vektorer $\mathbf{x}$ sådana att de involverade produkterna är definierade (3p)

(b) Använd resultatet i (a) för att visa att $(AB)C = A(BC)$, för alla matriser A, B och C sådana att de involverade produkterna är definierade (3p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$