Övningstentamen 5

MVE465, Linjär algebra och analys fortsättning K/Bt/Kf

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: ...

Hjälpmedel: Miniräknare är ej tillåtet

För godkänt på tentamen krävs minst 20 poäng då eventuell bonuspoäng är inräknad. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på kursens datorövningarna. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng på tentamen, inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. (a) [$131219 - 2a$] Bestäm B så att $B^2 \int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x)\,dx = 1$ (3p)

(b) [Variant på Exercise 5.3.14] Tolka $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \ln(1 + \frac{2k}{n})$ som en Riemannsumma för en integral och beräkna sedan; (4p)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \ln(1 + \frac{2k}{n})$$

2. (a) [$150115 - 4c$] Bestäm en partikulärlösning till $y''(x) + y(x) = x^3$ (3p)

(b) [Variant på Exercise 7.9.9] Lös begynnelsevärdesproblemet; (5p)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2 + e^y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. [$150115 - 5b$] Visa att $(1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it}$ är reellt för alla värden på $t \in \mathbb{R}$. (4p)

4. [Exercise 1.9.10] Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som motsvarar reflexion i y-axeln följt av moturs rotation $\pi/2$ radianer. (5p)

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) [$140822 - 1a$] Bestäm en bas för nollrummet till matrisen. (4p)

(b) [$140822 - 1b$] Bestäm en bas för kolonnrummet. (3p)

6. [110827 – 3]

(a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dvs. ange en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (3p)

(b) Med hjälp av detta, lös följande system av differentialekvationer; (3p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} , \ x_1(0) = 0 \ , \ x_2(0) = 1$$

7. [130823 – 5] Låt U vara det underrum som spänns upp av vektorerna;

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en ortogonal bas för U. (4p)

(b) Ange en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som ligger i det ortogonala komplementet $U^{\perp}$.
Vad är den ortogonala projektionen av din vektor $\mathbf{v}$ på U? (3p)

8. Analysens huvudsats knyter samman derivation och integration genom formeln;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Bevisa detta under lämpliga förutsättningar på $f(x), a$ och x.
Redogör tydligt för var förutsättningarna kommer in i beviset. (6p)

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ , där } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ , } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ och } \quad 0! = 1$$

T.ex är

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Koefficienterna $\binom{n}{k}$ kan även erhållas ur Pascals triangel (tal $k+1$ på rad $n+1$ räknat från toppen)

Konjugatregeln

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

T.ex är

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$