Tentamen
MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki

2018-08-31 , 08.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Linnea Hietala , telefon: 5325

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen), inklusive eventuella bonuspoäng från duggor 2018.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar, inklusive eventuella bonuspoäng.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (10p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definiera begreppen *lokalt maximum* och *sadelpunkt* (2p)

(det är den matematiskt exakta betydelsen som efterfrågas och inte någon intuitiv beskrivning av begreppen)

(b) Visa att funktionen $f(x,y) = \dfrac{xy}{2+x^4+y^4}$ har ett lokalt maximum i punkten $(1,1)$ och en sadelpunkt i $(0,0)$ (4p)

3. Låt K vara den kropp som begränsas av ytan $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 2$.

(a) Beräkna volymen av kroppen K (3p)

(b) Bestäm masscentrum för kroppen K då den består av ett homogent material (dvs. samma densitet i alla punkter). (2p)

4. Låt $\mathbf{F}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ och låt $\mathcal{C}$ vara den kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - t)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j}, 0 \le t \le 1$$

(a) Beräkna det arbete som vektorfältet $\mathbf{F}$ uträttar längs kurvan $\mathcal{C}$. (3p)

(b) Bestäm arean till det område R som kurvan $\mathcal{C}$ omsluter. (2p)

5. Låt $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ och låt C vara den cylinder som bestäms av $x^2 + y^2 \le a^2$ samt $-3 \le z \le 3$.

(a) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ upp genom toppen och ner genom botten av C. (3p)

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom mantelytan av C. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Uppgifterna på denna del motsvarar lärmålen för överbetyg, men eventuella poäng från denna del får räknas in i totalpoängen på tentan, oavsett resultat på godkäntdelen.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy$,
där D är triangeln med hörn i $(0,0),(0,2)$ och $(2,0)$. (6p)

7. Låt $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$

(a) dels direkt, dvs. via beräkning av $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ och parametrisering av ytan. (3p)

(b) dels med hjälp av Stokes sats. (3p)

8. Formulera Greens formel och bevisa den för x- och y-enkla områden. (6p)

Lycka till!
Thomas Wernstål

Anonym kod		sid.nummer	Poäng
	MVE470/MVE351 Flervariabelanalys, K/Kf/Bt/Ki	1	

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en normalvektor till ytan $z = xye^y$ i punkten $(1, 0, 0)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Skissa den kropp som begränsas av ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $y = \sqrt{x^2 + z^2}$. (2p)

Skiss:

(c) Bestäm en parametrisering av den del av ellipsen $4x^2 + y^2 = 9$ som ligger i första kvadranten samt ange en integral som ger längden av denna del av ellipsen (obs! integralen behöver inte beräknas). (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Låt $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{f}(x, y, z) = (x^2+yz\,,\ y^2-x\ln z)$. Bestäm Jacobimatrisen till $\mathbf{f}(x, y, z)$ i punkten $(2, 2, 1)$ och använd den för att bestämma ett approximativt värde av $\mathbf{f}$ i $(1.98, 2.01, 1.03)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad för MVE470/MVE351, läsåret 17/18

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Integralkatalog

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ 0 < a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C \ , \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \ , \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$

Övrigt

Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för Ω ges av $x_T = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz}$, analogt för y_T, z_T.

$\rho(x,y,z)$ är densiteten.