MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 170824 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Caroline Granfelt 5325

MVE475 Inledande Matematisk Analys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Formulera satsen om största och minsta värde. (2p)

(b) Undersök om funktionen $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ antar något största eller minsta värde. Ange i så fall dessa. (3p)

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to \infty} (x + e^x)^{1/x}$. (4p)

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx$. (4p)

5. Undersök funktionen $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$ och skissera dess graf. Ange speciellt eventuella lokala maxima/minima och asymptoter (konvexitet/konkavitet behöver inte utredas). (6p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) För f vissa värden på konstanten c har ekvationen $x^4 + 4x + c = 0$ fyra olika reella rötter. (2p)

(b) Funktionen $F(x) = \int_0^{x^2-2x} \frac{1}{1+t^4}\, dt$ har ett minsta värde för $x = 1$. (2p)

(c) Summan $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2}$ kan betraktas som en Riemannsumma till integralen $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$. (2p)

7. Låt$P(s, t)$ vara en punkt på kurvan $y = \frac{x}{x+1}$, $x \geq 0$. Normalen till kurvan i punkten P skär $x-$ axeln i punkten Q. För vilket val av P blir arean av triangeln med hörn i P, Q och $R = (s, 0)$ så stor som möjligt? (5p)

8. Bevisa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$. (5p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE475 Inledande Matematisk Analys 170824	sid.nummer 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna integralen $\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversa funktionen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ definierad för $x \leq 2$, och ange inversens definitionsmängd. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2+3}}{3x+2}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt D vara det område som begränsas av $0 \leq y \leq \sin^3 x$ och $0 \leq x \leq \pi$. Beräkna arean av D. Rita figur! (4p)

Lösning:

Lösningar MVE475, Inledande Matematisk Analys, 161222

1. (a) $\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}\,dx = 2\ln|x-1| - \ln|x| + C.$

(b) Kvadratkomplettering ger $(x-2)^2 - 2^2 = y$, så $x = 2 - \sqrt{y+4}$,
och vi har att $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ med $D_{f^{-1}} = [-4, \infty)$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2+3}}{3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{5+\frac{3}{x^2}}}{x(3+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{5+\frac{3}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

(d) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x+1} = u;\ dx = 2u\,du \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \,\text{och}\, x = 3 \Rightarrow u = 2 \end{array} \right\} = 2\int_1^2 (u^2-1)\,du = \frac{8}{3}.$

(e) $\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \cos x;\ du = -\sin x dx \\ x = 0 \Rightarrow u = -1 \,\text{och}\, x = \pi \Rightarrow u = -1 \end{array} \right\} =$
$-\int_1^{-1} (1-u^2)\,du = \frac{4}{3}.$

2. (a) Se boken.

(b) Vi ser att $f \to 0$ då $x \to \pm\infty$.
Vi deriverar

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2e^{-x^2}(-2x) = 2xe^{-x^2}(1-x)(1+x)$$

och ser att $f'(x) = 0$ för $x = 0$, $x = -1$ och $x = 1$.
Teckenstudering ger att vi har ett minsta värde i $(0,0)$ och ett största värde i $(1, 1/e)$.

3. $\lim_{x\to\infty} (x+e^x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x+e^x)^{1/x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}} =$[lHospital]$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x}} = e^1 = e.$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx =$
$\lim_{R\to-\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(x+\frac{1}{2})\right]_R^0 + \lim_{R\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(x+\frac{1}{2})\right]_0^R = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

5. Vår funktion $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x}$ är definerad för alla $x \neq 0$. Vi undersöker alla intressanta gränsvärden.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \text{"} + \infty\text{"}$$

och för det lite svårare gränsvärdet då $x \to 0^-$ gör vi variabelbytet $\dfrac{1}{x} = -t$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = -\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0.$$

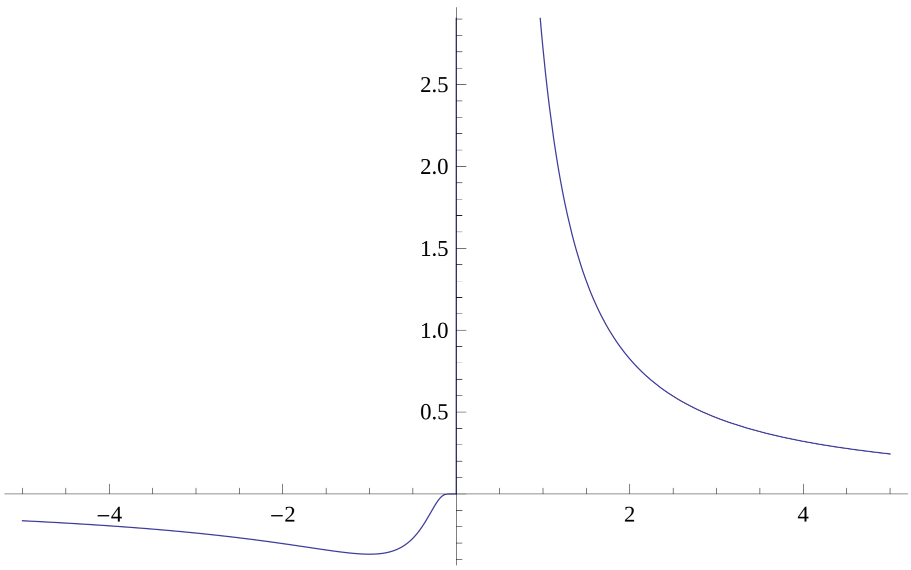
Genom gränsvärdesstuderingen ser vi att $x = 0$ är en lodrät asymptot och $y = 0$ är en vågrät asymptot. Vi deriverar f och får då

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} - \frac{1}{x^3}e^{1/x} = -\frac{1}{x^3}e^{1/x}(1+x).$$

Derivatans nollställe är för $x = -1$. För översikt och slutsatser gör vi en teckentabell.

x	$-\infty$		-1		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	odef	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	odef	$\searrow$	0

Vi ritar nu grafen till f.



6. (a) Falskt. $f'(x) = 4(x^3+1)$ och vi ser att $f'(x) = 0$ för $x = -1$. Teckenstudering visar att vi har ett lokalt minimum i $x = -1$ och växer därefter strängt mot ∞. Detta innebär att funktionen kan ha högst två skärningspunkter med $x-$ axeln.

(b) Sant. $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2-2x} \frac{1}{1+t^4}\,dt = (\frac{d}{du}\int_0^u \frac{1}{1+t^4}\,dt)\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^4}\frac{du}{dx} = \frac{2(x-1)}{1+(x^2-2x)^4}$ och vi ser att $F'(x) = 0$ för $x = -1$. Teckenstudium visar att vi har ett lokalt minimum i $x = -1$ som också är minsta värde för f.

(c) Sant. Med $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ och $x_i^* = x_i = a + i\Delta x = \dfrac{i}{n}$ så är

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

7. Vi behöver normalen.s ekvation och börjar därmed att derivera f

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Normalens riktningskoefficient är $-1/f'(s) = -(s+1)^2$, så dess ekvation är

$$y - \frac{1}{s+1} = -(s+1)^2(x-s).$$

Vi sätter $y = 0$ för att få $x-$ koordinaten

$$-\frac{1}{s+1} = -(s+1)^2(x-s) \Rightarrow x = s + \frac{s}{(s+1)^3}.$$

Triangelarean blir då

$$A(s) = \frac{s^2}{2(s+1)^4}, \qquad A(s) \to 0 \text{ då } x \to 0^+ \text{ och då } x \to \infty$$

Eftersom A är positiv och begränsad, måste då finnas ett maximum, där derivatan är noll.

$$A'(s) = \frac{2s(s+1)^4 - 4s^2(s+1)^3}{2(s+1)^8} = ... = \frac{s(1-s)}{(s+1)^5}.$$

Enda positiva nollstället är $s = 1$, som alltså ger oss vårt maximum. $P = (1, \frac{1}{2})$.

8. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. För något c mellan x och 1 gäller enligt medelvärdessatsen att

$$\arctan x - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+c^2}(x-1) \Rightarrow |\arctan x - \frac{\pi}{4}| = \frac{1}{1+c^2}|x-1| \leq |x-1|.$$

Välj $\delta = \varepsilon$ och vi har att

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |\arctan x - \frac{\pi}{4}| \leq |x-1| < \delta = \varepsilon.$$

Alltså gäller enligt gränsvärdesdefinitionen att

$$\lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$