

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng. Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (16p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definera vad som menas med ett underum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

- (b) Definaera vad som menas med begreppet linjärt beroende mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. (2p)

3. Bestäm det andragradspolynom $p(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ som är bäst anpassat till punkterna (5p)
 $(-1, 0), (0, -2), (1, -2), (2, 2)$ enligt minstakvadratmetoden.

4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm alla egenvärden till A . (2p)

- (b) Bestäm alla egenvektorer till A . (2p)

- (c) Är A diagonaliserbar (Motivera ditt svar)? (1p)

5. Bestäm en ortogonal bas till spannet av följande vektorer: (4p)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)
- (a) Om en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar då är varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ en egenvektor av A . (2p)
 - (b) Om nollrummet av en 7×11 matris är 5– dimensionellt så är dimensionen av kolonnrummet 2. (2p)
 - (c) Om A och B är $n \times n$ matriser och B är inverterbar, så är $\det(BAB^{-1}) = \det A$. (2p)
7. Låt $\mathbf{v}$ vara vektorn $\mathbf{v} = [\sqrt{3} \ 1]^t$ i $\mathbb{R}^2$, och låt $L = \text{span}\{\mathbf{v}\}$ vara linjen som spänns upp av $\mathbf{v}$.
- (a) Ta fram projektionen av vektorn $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^t$ och $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^t$ på linjen L . (2p)
 - (b) Om p är projektionen av vektorn w på L , så ges speglingen s av w kring L av $s = 2p - w$. Ta fram speglingen av vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ kring linjen L . (1p)
 - (c) Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som först speglar en vektor kring linjen L och sedan speglar kring x - axeln. Ta fram standardmatrisen för avbildningen T . (2p)
 - (d) Avbildningen T ovan kan beskrivas som en rotation. Vad är rotationsvinkeln? (1p)
8. Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ matris och låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara två vektorer som hör till olika egenvärden. Bevisa att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala. (4p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 180825	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka värde på konstanten c har det linjära systemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + cx_3 + x_4 = c \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -c \end{cases}$$

lösning?

Lösning:

Svar:

(b) Ange standardmatrisen till linjära transformen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som först roterar punkter medurs runt origo med vinkeln $\frac{\pi}{6}$ radianer och sedan speglar punkter i x -axeln. (3p)

Lösning:

Svar:

(c) Bestäm på parameterform, linjen L som går genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(4, 0, 1)$. (3p)

Lösning:

Svar:

(d) Bestäm (om möjligt) en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ som inte kan skrivas som en linjärkombination

av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (Motivera ditt svar!) (3p)

Lösning:

Svar:

(e) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 3)$ och som är parallellt med det plan som innehåller punkterna $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ och $(1, 1, -1)$. (4p)

Lösning:

Svar: