

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng. Bonuspoäng från duggor 2019 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (16p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definera vad som menas med en minstakvadratlösning till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

(b) Visa först att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ och

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm sedan en minstakvadratlösning till ekvationssystemet ovan. (5p)

3. (a) Definera vad som menas med att en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar. (2p)

(b) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -9 & -7 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar och diagonalisera den i så fall. (4p)

4. Låt $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ och $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

- (a) Bestäm en ON- bas för W . (2p)

(b) Låt $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$. Bestäm ortogonalprojektion av $\mathbf{y}$ på W samt avståndet från $\mathbf{y}$ till W . (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris sådan att systemet $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar så är 2 ett egenvärde till A . (1p)

(b) För alla (2018×2019) matriser gäller att $\dim(\text{Nul}(A)) + \dim(\text{Col}(A)) = 2018$. (1p)

(c) Om A är en 3×3 matris med tre pivotkolonner så finns det elementära matriser $E_1, \dots, E_p$ sådana att $E_p \cdots E_1 A = I$. (1p)

(d) Antag att $AB = BA$ och att A är inverterbar. Då gäller att $A^{-1}B = BA^{-1}$. (1p)

(e) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) = 0$. (1p)

(f) Avbildningen $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, x_3 - x_2, x_1 + 1)$ är linjär. (1p)

6. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som svarar mot en spegling i planet $6x + 3y - 2z = 0$. (5p)

7. Antag att A och B är $(n \times n)$ matriser. Bevisa att $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. (5p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 190318	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm en vektor som är ortogonal mot de båda vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 5)$. (2p)

Lösning:

Svar:

- (b) Ange standardmatrisen till linjära transformen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som först roterar punkter moturs runt origo med vinkeln $\frac{\pi}{3}$ radianer och sedan projicerar i x_1 -axeln. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar:

(d) Låt T vara den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som definieras genom (4p)

$$T(\mathbf{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3).$$

Bestäm en bas för nollrummet till T .

Lösning:

Svar:

(e) Bestäm skärningslinjen L mellan de två planen $x + 2y - z = 1$ och $2x - 4y + 6z = 10$. (4p)
Avgör om linjen L är parallell med planet $\Pi : x - 2y + 3z = 2$.

Lösning:

Svar: