

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng. Bonuspoäng från duggor 2019 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (16p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definera vad som menas med ett underum i $\mathbb{R}^n$. (2p)
(b) Definaera vad som menas med begreppet linjärt oberoende mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$. (2p)

3. Visa först att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och
- $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm sedan en minstakvadratlösning till ekvationssystemet ovan. (5p)

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ (4p)

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör nollrummet $\text{Nul } A$. (1p)

- (b) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör kolonnrummet $\text{Col } A$. (2p)
Skriv i så fall $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av A 's kolonner.

- (c) Bestäm baser för $\text{Col } A$ och $\text{Nul } A$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en inverterbar 2×2 -matris så är A diagonaliserbar. (2p)

(b) Om A och B är matriser så att $A^2 = B^2$ så är $A = B$ eller $A = -B$. (2p)

(c) Om A och B är inverterbara matriser så att $A+B$ är inverterbar, så är även $A^{-1}+B^{-1}$ inverterbar. (2p)

7. Låt T vara den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som definieras genom

$$T(\mathbf{x}) = (3x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - 7x_2 + 7x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3, 2x_2 - 6x_3).$$

(a) Bestäm avbildningens standardmatris A . (1p)

(b) Avgör om avbildningen T är injektiv. (2p)

(c) Avgör om avbildningen T är surjektiv. (2p)

8. Antag att A är $n \times n$ matris. Bevisa att $\det(A) \neq 0$ om och endast om A är inverterbar.
Du behöver inte visa att $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ för elementära matriser E . (5p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 190612	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Lösning:

Svar:

(b) Låt T vara avbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som relativt standardbasen har matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beskriv i ord vad T gör.

Lösning:

Svar:

(c) Lös matrisekvationen $BX = AX + A$ där $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

- (d) Betrakta triangeln med hörn i punkterna $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ och $C = (6, 5, 3)$. Visa att triangeln är rätvinklig och beräkna dess area. (3p)

Lösning:

Svar:

- (e) Låt Π vara planet genom punkterna $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 1)$ och $(2, 0, 0)$. Ange en ekvation för linjen genom origo som är vinkelrät mot Π . (4p)

Lösning:

Svar: