Lösningar MVE 480, 190826

1.

a) Sätt in x, y och z i planets ekvation.

$$2(2-t)-(1+3t)+4t = 2 \iff t=1,$$

Vilket ger skärningspunkten

$$x = 2-1,\quad y = 1+3,\quad z = 4 \iff$$

$$(x,y,z) = (1,4,4).$$

Om linjen är vinkelrät mot planet är linjens riktningsvektor en multipel av planets normalvektor d.v.s.

$$c(-1,3,4) = (2,-1,1)$$

och vi ser att dessa vektorer ej är parallella. Nej!

b) $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\bar{x}$ sökes!

Vi ställer upp totalmatrisen och får

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ så } \bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) <u>egenvärden</u>

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 4$ (egenvärde)

<u>Egenvektorer</u>

<u>$\lambda = 4$</u>

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri x_1 bunden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ så } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ en egenvektor.}$$

d) Vi har att $ABB^{-1} = A$ ty $\det B = 7-6=1 \neq 0$

så $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ och $A = (AB)B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 27 \end{bmatrix}$

e) $[\bar{x}]_\beta$ söker!

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ Totalmatrisen}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ så } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.

a) Vi ställer upp totalmatrisen om Gusseliminerar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7/4 \end{bmatrix}$$

och vi ser att systemet saknar lösning.

b) minsta kvadratlösning $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

<u>Totalmatrisen</u>

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/17 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 30/17 \end{bmatrix}$$

<u>Alltså:</u> $\hat{x} = \begin{bmatrix} 11/17 \\ 2/3 \\ 30/17 \end{bmatrix}$ är minstakvadratlösn.

4.

a) $F(\bar{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $F(\bar{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F(\bar{e}_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$,

$F(\bar{e}_4) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$, där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$.

Det följer att standardmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) & F(\bar{e}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Bestäm en trappstegsmatris R till A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Vi ser att pivotkolonnerna i R är kolonn 1 och 2. Det betyder att kolonn 1 och 2 i A är pivotkolonner och att de utgör en bas i Col A.

Alltså: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas i Col A = A:s kolonnrum.

Vi löser nu systemet $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Det finns 2 fria variabler x_3 och x_4.

Sätt: $x_3 = s$ $x_4 = t$. Då får vi den allmänna lösningen

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s + \frac{1}{2}t \\ 2s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får då att

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ är en bas i Nul A = A:s nollrum.

5. Observera att A är symmetrisk.
Alltså är A diagonaliserbar.

<u>egenvärden</u>

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (2-\lambda)^2 \lambda(\lambda-2) = \lambda(\lambda-2)^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2 \qquad \lambda_4 = 0$$

egenrummet hörande till $\lambda_{1,2,3} = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = t_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_1} + t_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_3} + t_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_2}$$

egenvektorer

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas

i egenrummet hörande till $\lambda = 2$.

Vi ser att $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = 0$,

d.v.s. en ortogonal bas. Normera $\Rightarrow$

$\left\{ \bar{v}_1 , \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_2 , \bar{v}_3 \right\}$ är en ON-bas.

egenrummet hörande till $\lambda_4 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ så}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas i egenrummet hörande till $\lambda_4 = 0$. Normera

$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Skapa P genom att ställa egenrummens respektive ON-baser som kolonner i P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Eftersom P är en ortogonal matris $\Rightarrow P^{-1} = P^T$.

Skapa D genom att ställa motsvarande egenvärden på huvuddiagonalen i D:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Med dessa matriser P och D gäller nu att $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

6. <u>Sant:</u>

a)

Sats. 14.4. säger att om ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ är lösbart för varje $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^m$ så måste A ha pivotelement i varje rad, vilket i sin tur innebär att A måste ha m pivotkolonner.

b) <u>Falskt:</u>

Systemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$
har inga fria variabler och <u>ingen</u> lösning.

c) <u>Falskt:</u>

Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara ett par av linjärt oberoende vektorer och låt $\bar{w} = 2\bar{v}$. Då $\bar{w} = 0 \cdot \bar{u} + 2\bar{v}$, så $\bar{w}$ är en linjärkombination av $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Men $\bar{u}$ kan inte vara en linjärkombination av $\bar{v}$ och $\bar{w}$ ty om så skulle vara fallet så är $\bar{u}$ en multipel, vilket är omöjligt eftersom $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ är linjärt oberoende.

7. Vi bestämmer skärningslinjen mellan planen R och S:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -3 \end{bmatrix}$$

x och y bundna. z fri. Sätt $z = 3t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 5t \\ z = 3t \end{cases}$$

Eftersom linjen är i planet Q har vi en punkt i planet: $(x,y,z) = (1,-3,0)$ (för $t=0$).

Vi behöver en normalvektor till planet. Vi har att $\bar{v}_1 = (-1,5,3)$ (riktningsvektor till skärningslinjen) och $\bar{v}_2 = (1,-7,2)$ (normalvektor till planet T) är parallella med det söxta planet Q och vi får därmed en normalvektor till Q genom $\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$.

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = (31, 5, 2)$$

Insättning i planets ekvation ger

$$31(x-1) + 5(y+3) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 31x + 5y + 2z = 16$$

8. $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$. Vi har då att
sätt:

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot (\bar{i} + \bar{j}) = 0 \\ \bar{a} \cdot (\bar{i} + \bar{k}) = 0 \end{cases}$$ för vår sökta vector $\bar{a}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_2 \\ a_1 = -a_3 \end{cases} \quad (*)$$

Eftersom det är en enhetsvector vi söker vet vi att $\|\bar{a}\| = 1$ d.s.v.
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Insättning av $(*)$ ger att $3a_1^2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Tag: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{j} - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{k}$

är en enhetsvector som är ortogonal mot både $\bar{i} + \bar{j}$ och $\bar{i} + \bar{k}$.

Alt. Tag $a_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{k}.$$