# Lösningar MVE 480, 190612

1. a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ersätt kolonn 1 i A med $\bar{b}$.

$$A_1(\bar{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ så

$$\det A_1(\bar{b}) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det A = -10$$

så

$$x_1 = \frac{0}{-10} = 0$$

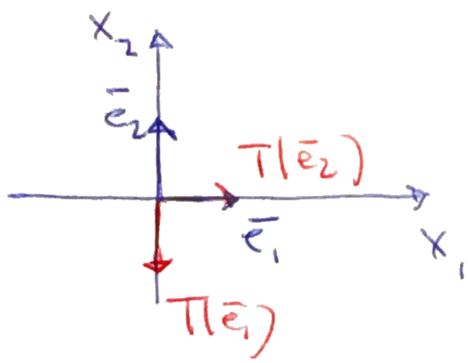
P.s.s. bestämmes $x_2$ och $x_3$

$$x_2 = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}.$$

b) $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$




$T$ roterar planet som spänns upp av $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ $90^\circ$ medsols.

c) $BX = AX + A \Leftrightarrow BX - AX = A \Leftrightarrow$
$(B-A)X = A \Leftrightarrow X = (B-A)^{-1}A$ om

$(B-A)^{-1}$ existerar

$(B-A)^{-1} = \begin{bmatrix}-3/2 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}$

så

$X = \begin{bmatrix}-3/2 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -2\\-1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -1\\-3 & 0\end{bmatrix}$

d) $\bar{u} = \overrightarrow{AB} = (1,2,-1) - (1,1,1) = (0,1,-2)$

$\bar{v} = \overrightarrow{AC} = (6,5,3) - (1,1,1) = (5,4,2)$

$\bar{w} = \overrightarrow{BC} = (6,5,3) - (1,2,-1) = (5,3,4)$

<u>Så</u>

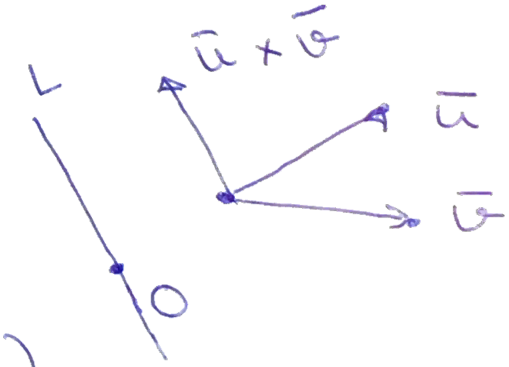
$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 + 4 - 4 = 0$, vilket visar att $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Arean

$$A = \frac{1}{2} \| \bar{u} \times \bar{v} \| = \frac{1}{2} \| 10, -10, -5 \|$$

$$= \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{15}{2}.$$

e) $\bar{u} = (2,-1,1)$




$\bar{v} = (1,-2,0)$

$\bar{u} \times \bar{v} = (2,1,-3)$

Normalvektorn $\bar{u} \times \bar{v}$ till planet utgör en riktningsvektor för varje linje vinkelrät mot planet $\Pi$. $(0,0,0)$ är en punkt på L.

<u>Så</u>

$$L: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -3t \end{cases}$$

3. Vi försöker lösa $A\bar{x} = \bar{b}$ med eliminationsmetoden

$$[A|\bar{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{bmatrix}$$

Och vi ser att ES saknar lösning

Minsta kvadratlösning: $A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{b}$

$$[A^T A | A^T \bar{b}] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

entydig lösning

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Vi beräknar först

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-5-\lambda)+18 =$$

$$= \lambda^2+\lambda-2 = (\lambda-1)(\lambda+2)$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ då $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$

egenvärden

egenvektorer

$\lambda_1 = 1$ : $A - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så

$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = -2$ : $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så

$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor

5. a) Vi observerar att $A\bar{v} \neq \bar{0}$, så $\bar{v}$ ligger ej i nollrummet.

b) Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systemet är lösbart, så $\bar{v}$ ligger i kolonnrummet. Varje tal av $x_3$ ger en lösning, exempelvis ger $x_3 = 0$ att

$$\bar{v} = 4\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \bar{a}_4.$$

c) Vi ser i räkningen ovan att $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ är pivotkolonner. Dessa bildar en bas för kolonnrummet. Ersätter vi högerledet med $\bar{0}$ ser vi att $A\bar{x} = \bar{0}$ har lösningarna

$$\bar{x} = x_3 \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ Alltså är $\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en

bas för nollrummet.

6. a) Falskt. Ett motexempel är

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är inverterbar,

men enda egenvärdet är $\lambda = 1$ och motsvarande egenrum är bara 1-dimensionellt (det spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$).

b) Falskt. Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ger ett motexempel.

c) Sant. Man kan skriva $A^{-1} + B^{-1} =$

$= B^{-1}(A+B)A^{-1}$, så påståendet följer av att produkten av inverterbara matriser är inverterbar.

(Vi ser även att $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$.)

7. a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

b) Sats 1.9.12 säger att T är injektiv om och endast om kolonnerna i A är linjärt oberoende.

Vi behöver alltså avgöra om det finns icke-triviala lösningar till ekvationenen

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 = \bar{0}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Trivial lösning $\Rightarrow$ linjärt oberoende $\Rightarrow$

T är <u>injektiv</u>

c) Från sats 1.9.12 får vi också att

T är surjektiv om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^4$.

Frågan är om $[\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \ \bar{b}]$ har en lösning för varje $\bar{b} \in \mathbb{R}^4$. För att detta ska inträffa måste det finnas pivotelement i varje rad i matrisen A. Men, A har fler rader än kolonner så $[\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \ \bar{b}]$ har inte en lösning för varje $\bar{b} \in \mathbb{R}^4$. Det följer att T <u>inte</u> är surjektiv.