

Lösningar MVE 480, 180608

1. a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 (40 - 42)$$
$$= -48$$

b) $A = (4, -1, 0)$

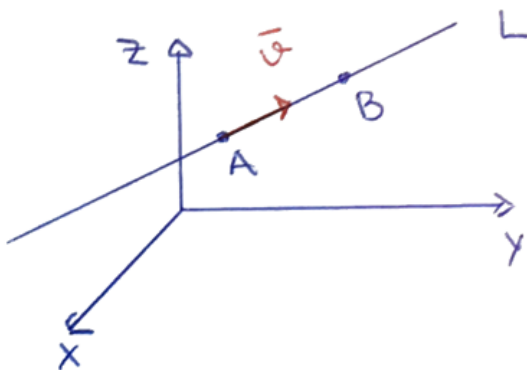
$B = (2, 0, 2)$

en riktningsvektor
 $\vec{u}$ till L ges av

$$\vec{u} = \vec{AB} = (-2, 1, 2)$$

så L på parameterform ges av

$$x = 4 - 2t \quad y = -1 + t \quad z = 2t$$



c) Minstakvadratlösning $\hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- d) egenvärden 1 multiplicitet 2
egenvärden 2 multiplicitet 2

$\Rightarrow$ Båda egenvektorsrummen måste ha dimensionen 2 för diagonaliserbarhet.

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & a-4b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a - 4b = 0$$

$$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För att få två kolonner utan pivotelement måste $b = 0 \Rightarrow a = 0$.

e) Villkor: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Så

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2, 1, 1) \cdot (a, 1+a, 1-a) = 2a + (1+a) + (1-a) \\ &= 2a + 2 = 0 \quad (\Rightarrow a = -1) \end{aligned}$$

Längden

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + 2\vec{v}\| &= \|(2, 1, 1) + 2(-1, 0, 2)\| = \\ &= \|(0, 1, 5)\| = \sqrt{26} \end{aligned}$$

2. Se boken!

$$3. \begin{bmatrix} 0 & 2 & -10 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Pivotkolumner 1, 2, 5 så en bas för Col A

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\begin{aligned} b) \quad x_1 &= -9s + 3t \\ x_2 &= 5s - 7t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så en bas för Nul A

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \dim \text{Nul } A &= 2 \\ \dim \text{Col } A &= 3 \end{aligned}$$

$$4. \quad T(\bar{x}) = (x_1, -2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} 2R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \\ -4R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Varav}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

eigenvärden till A : $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5 = \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$$

eigenvektorer: $(A - \lambda I) \bar{x} = \bar{0}$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ en egenvektor } \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$, \text{ en egenvektor } \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Så

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + d \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

6. a) SANT

Att T är injektiv är ekvivalent med att avbildningsmatrisen för T (som är en $m \times n$ matris) har pivotelement i varje kolonn. Men eftersom dessa n pivotelement ligger i olika rader måste $m \geq n$.

b) FALSKT

Ett motexempel ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) SANT

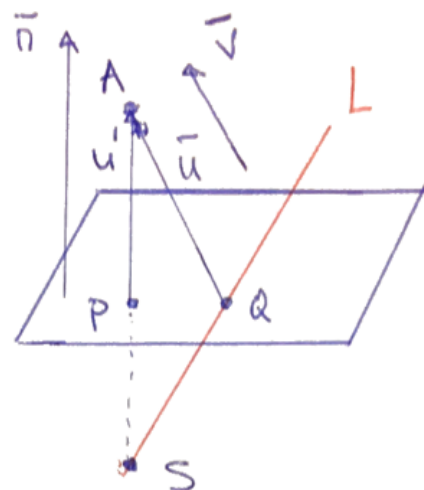
Tag två icke-parallella vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i planet, samt en normalvektor $\vec{w}$ till π . Dessa är linjärt oberoende och alltså en bas för $\mathbb{R}^3$. Vidare är $T(\vec{u}) = \vec{u}$ $T(\vec{v}) = \vec{v}$ och $T(\vec{w}) = -\vec{w}$ så $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är egenvektorer. Det finns alltså en bas för hela rummet bestående av egenvektorer, vilket är definitionen av att vara diagonaliserbar.

7.

Q sökes!

Linjen L sökes

(reflexion i planet från punkten A)



Om L, är linjen genom

A och Q fås L, på parameterform genom

$$x = 1 + t \quad y = 2 \quad z = 1 + 2t$$

Insättning av x, y, z i planets ekvation ger att $t = 1 \Rightarrow Q = (2, 2, 3)$

Vi bildar vektorn $\vec{u} = \vec{QA} = (-1, 0, -2)$.

Ortogonalprojektion $\vec{u}'$ av vektorn $\vec{u}$ på vektorn $\vec{n}$ ges av

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{(-1, 0, -2) \cdot (1, 1, -1)}{3} (1, 1, -1) = \frac{1}{3} (1, 1, -1)$$

Vi vet att sökt linje L går genom

Spegelpunkten S och $\vec{QS}$ är en riktningsvektor till L. Vektoraddition ger (enligt

figur) att

$$\vec{QS} = \vec{u} - 2\vec{u}' = (-1, 0, -2) - \frac{2}{3}(1, 1, -1) = -\frac{1}{3}(5, 2, 4)$$

Vi väljer riktningsvektor $\vec{v} = (5, 2, 4)$ och

Vi vet en punkt på linjen $Q = (2, 2, 3)$

Så linjens ekvation på parameterform ges av

$$x = 2 + 5t \quad y = 2 + 2t \quad z = 3 + 4t$$

8. Om AB är inverterbar är

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$$

Alltså är varken $\det A$ eller $\det B$ lika med noll, vilket medför att A och B båda är inverterbara.