

Lösningar 20180825

1. a) Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -c \end{bmatrix} \sim -R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & c & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-c & -2 & -2c \end{bmatrix} \sim R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & c & 1 & c \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-c & 0 & -2c \end{bmatrix}$$

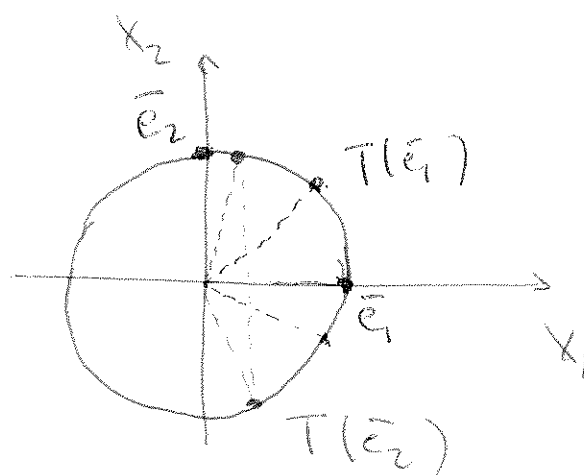
Vi ser i rad 3 att om

$c = 2$ saknas lösning

$c \neq 2$ lösning

$$b) \quad \bar{e}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$



Så

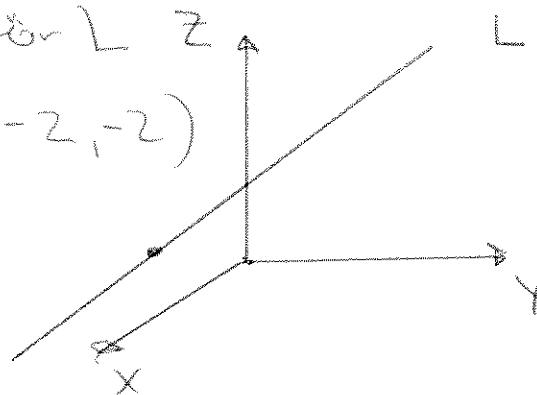
$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

c) En riktningsvektor för L z

$$\bar{u} = (4-1, 0-2, 1-3) = (3, -2, -2)$$

en punkt på linjen

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$$



RLE på parameterform

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

d) $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

linjärkombination

$$\bar{b} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + c_3 \bar{u}_3$$

Vi ställer upp totalmatrisen

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -3 & -2b_2 + b_3 \end{bmatrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{b_1 - 2b_2 + b_3} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Lösning saknas då $b_1 - 2b_2 + b_3 \neq 0$

(Välj t.ex. $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1$)

(Så $\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en vektor som inte kan skrivas som en linjärkomb. av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$)

e) Planet π sökes! En punkt i π är $(1, 2, 3)$.

En normalvektor till π fås genom

$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2$ där $\bar{u}_1 = (1, -2, 1)$ och $\bar{u}_2 = (2, 0, -1)$

som är vektorer i planet parallellt med π .

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = (2, 3, 4)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4z - 20 = 0$$

3. Insättning av punkterna i $P(x)$ ger ekvationssystemet (som saknar lösning)

$$\begin{cases} B_0 - B_1 + B_2 = 0 \\ B_0 + 0B_1 + 0B_2 = -2 \\ B_0 + B_1 + B_2 = -2 \\ B_0 + 2B_1 + 4B_2 = 2 \end{cases}$$

På matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A \quad \bar{x} \quad \bar{y}$

En minsta kvadratlösning: $A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{y}$

där $\hat{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{pmatrix}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} ; A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 6 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -23/10 \\ 0 & 1 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 & 15/10 \end{bmatrix}$$

Så $P(x) = -\frac{23}{10} - \frac{9}{10}x + \frac{15}{10}x^2$

$$4. a) \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda) - 4) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) =$$

$$= \lambda(5-\lambda)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 5$$

$$b) \underline{\lambda = 0}$$

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ egenvektor } \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda = 5}$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ egenvektorer } \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) JA! Alla vektorer är ortogonala mot varandra. 3 linjärt oberoende vektorer.

5. Vi ser att $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = 0$ så det räcker att tillämpa Gram-Schmidt på den tredje vektorn: $\bar{u}_3 = \bar{x}_3 - \text{proj}_W \bar{x}_3$

$$\text{Proj}_W \bar{x}_3 = \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1} \bar{x}_1 + \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2}{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2} \bar{x}_2 = \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så

$$\bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En ortogonal bas är då

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

6. a) Falskt: om $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(diagonaliserbar)

och $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ som inte är}$$

en multipel av $\bar{x}$, så $\bar{x}$ är inte en egenvektor.

b) Falskt: $\dim \text{Col } A + \dim \text{Nul } A = 11$

om $\dim \text{Nul } A = 5 \Rightarrow \dim \text{Col } A = 6$

c) Sant:

$$\det(BAB^{-1}) = \det B \det A \det B^{-1} =$$

$$= \det(\overset{\text{inverser}}{B B^{-1}}) \det A =$$

$$= \det I \det A$$

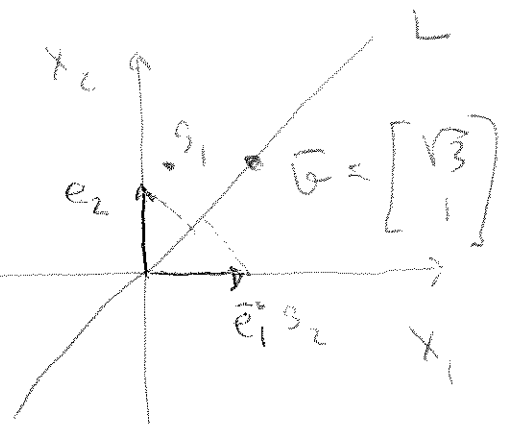
$$= \det A.$$

$\bar{P}_1$ oen $\bar{P}_2$ pà L

7.

$$a) \quad \bar{P}_1 = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} \quad \bar{u} = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$



$$c) \quad \bar{P}_2 = \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}} \quad \bar{u} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \bar{S} = 2\bar{P} - \bar{u}$$

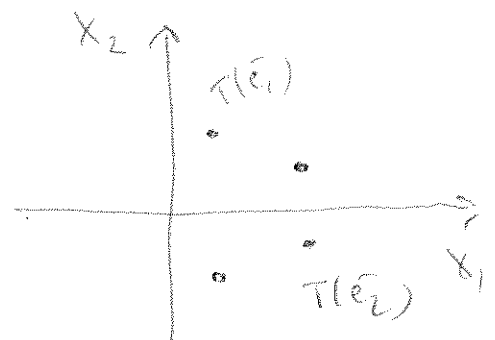
$$\bar{S}_1 = 2\bar{P}_1 - \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_2 = 2\bar{P}_2 - \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A = [T(\bar{e}_1) \quad T(\bar{e}_2)]$$

$$\bar{e}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$



Sà

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

d) Moturs rotation

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Låter vi $\theta = -\frac{\pi}{3}$ så blir $R = A$

T är rotation med $-\pi/3$ moturs
($\pi/3$ medurs)