Lösningar MVE 480, 20190318

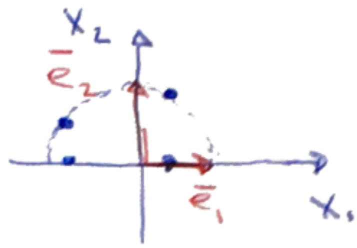
1. a) $$\bar{v} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$$= \bar{i} + \bar{j} - \bar{k} = (1, 1, -1)$$

---

b) $$\bar{e}_1 \to \begin{bmatrix} \cos \pi/3 \\ \sin \pi/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\bar{e}_2 \to \begin{bmatrix} \cos 5\pi/6 \\ \sin 5\pi/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatrisen blir då

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \quad -R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \quad \frac{1}{9} R_3 \to R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4R_3 + R_2 \to R_2 \\ -2R_3 + R_1 \to R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = [I \quad A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $T(\bar{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$

<u>Så</u>

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2 bundna

x_3 fri

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 \\ x_2 &= -6x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för Nul A $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

---

e) Totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x = 3 - t \quad y = -1 + t \quad z = t$

Om skalärprodukten mellan $\bar{v} = (-1, 1, 1)$ och $\bar{n} = (1, -2, 3)$ är lika med noll ok! $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$. JA!

2 b) Minstakvadratlösning: $\boxed{A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}}$ $\circledast$

Först visar vi att ES saknar lösning.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

och vi ser att ES saknar lösning.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

För att lösa $\circledast$ ställer vi upp totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 42 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

<u>Så</u>

$\hat{x}_1 = 4/3$

$\hat{x}_2 = -1/3$, $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

3. b) Vi tar först fram egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 6 \\ 0 & -9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((8-\lambda)(-7-\lambda)+54\big)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

och sedan egenvektorerna

$\underline{\lambda = 2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -9 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egenvektorer

egenvektor

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & -9 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

<u>så</u>

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. a) Först bestämmer vi en ortogonalbas $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ via Gram-Schmidt proceduren.

Tag $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$ och sedan

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} - \frac{14}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Sedan normaliserar vi och erhåller en ON-bas $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, där

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) Det blir enklast att använda ortogonalbasen $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ för W där

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har då att

$$\text{Proj}_W \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 \cdot \bar{x}_1}{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}}\bar{x}_1 + \frac{\bar{y}_2 \cdot \bar{x}_2}{\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2}\bar{x}_2 = \frac{14}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{10}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Sedan har vi att

$$\|\bar{y} - \text{Proj}_W \bar{y}\| = \left\| \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{30}$$

5\. a) Sant Per definition av begreppet egenvärde.

b) Falskt Snarare är summan av dessa dimensioner lika med 2019,

c) Sant Om A är en 3x3 matris med tre pivotkolonner så är A radekvivalent med I_3.

d) Sant $\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = A^{-1}BA$ ty A inverterbar

$$B = A^{-1}BA$$

$$BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$$

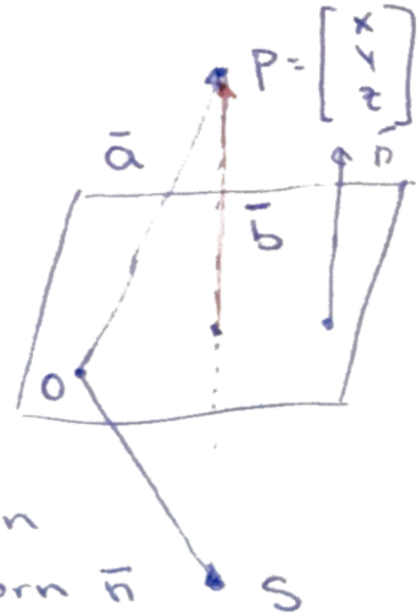
$$BA^{-1} = A^{-1}B$$

e) Sant. $\bar{b}\cdot(\bar{a} - \text{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}) = \bar{b}\cdot\left(\bar{a} - \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{b}\cdot\bar{b}}\bar{b}\right)$

$$= \bar{b}\cdot\bar{a} - \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{b}\cdot\bar{b}}\bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

f) Falskt $T(0,0,0) = (0,0,1) \neq \bar{0}$ så T är inte linjär

6. Spegling



$\overrightarrow{OS} = \bar{a} - 2\bar{b}$

där $\bar{b} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\,\bar{n}$,

Ortogonala projektionen av vektorn $\bar{a}$ på vektorn $\bar{n}$

Så

$$S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 2\,\frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 2\,\frac{6x+3y-2z}{49}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{2}{49}\begin{bmatrix} 36x+18y-12z \\ 18x+9y-6z \\ 12x-6y+4z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -23x-36y+24z \\ -36x+31y+12z \\ 24x+12y+41z \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{49}\begin{bmatrix} -23 & -36 & 24 \\ -36 & 31 & 12 \\ 24 & 12 & 41 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Så: $A = \dfrac{1}{49}\begin{bmatrix} -23 & -36 & 24 \\ -36 & 31 & 12 \\ 24 & 12 & 41 \end{bmatrix}$