

Analys 1, MVE 535, vt 2019, Övning 2.1

Ex. Visa att $f(x) = \frac{x}{1+x}$ är injektiv och bestäm f^{-1} .

Lös.: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \Leftrightarrow x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_1 x_2 = x_2 + x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ injektiv!}$$

$$f^{-1}(x) = y \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + xy = y \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

Ex. Lös ekvationen $3^{8-5x} = 7$

Lös.: $3^{8-5x} = 7 \Rightarrow \ln(3^{8-5x}) = \ln(7) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (8-5x)\ln(3) = \ln(7) \Leftrightarrow 8-5x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 8 - \frac{\ln(7)}{\ln(3)} \therefore x = \frac{1}{5} \left(8 - \frac{\ln(7)}{\ln(3)} \right)$$

Ex. Lös ekvationen $\ln(x^2-1) = 3$

Lös.: $\ln(x^2-1) = 3 \Rightarrow e^{\ln(x^2-1)} = e^3 \Leftrightarrow$

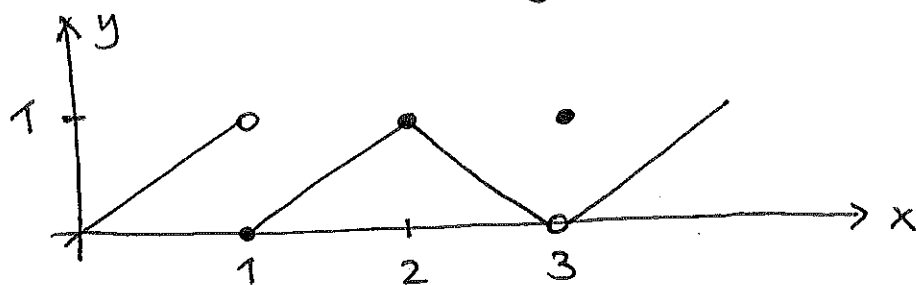
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = e^3 \Leftrightarrow x^2 = 1 + e^3$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{1 + e^3}$$

Ex. Förenkla $x^{1/\ln(x)}$

Lös.: $x^{1/\ln(x)} = e^{\ln(x^{1/\ln(x)})} = e^{\frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(x)} = e$

Ex. Funktionen g har grafen



Beräkna följande gränsvärden om de existerar

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

Lös.: (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ ~~ett~~ ett gränsvärde i $x=1$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$ om det existerar.

Lös.: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \frac{1^2 - 1}{\sqrt{1+3} - 2} = \frac{0}{0}$ Hmm...

Standardtrick: Förläng med konjugatet till nämnaren

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3 - 2^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x-1}(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{\cancel{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} (1+1)(\sqrt{1+3} + 2) = 8$$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x}$ om det existerar

Lösn.: $x \rightarrow 2^+ \leftarrow x$ närmar sig 2 från höger $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x$ är hela tiden större än 2 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-x$ är hela tiden mindre än 0

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2-x}$ existerar ej!

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2}{x-x^2}$ om det existerar

Lösn.: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x} - 1)} = \frac{1}{-1} = -1$

$\frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
 $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2}$ om det existerar.

Lösn.: $x \rightarrow a^+ \leftarrow x$ närmar sig a från höger $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-a$ är hela tiden positiv $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}$

