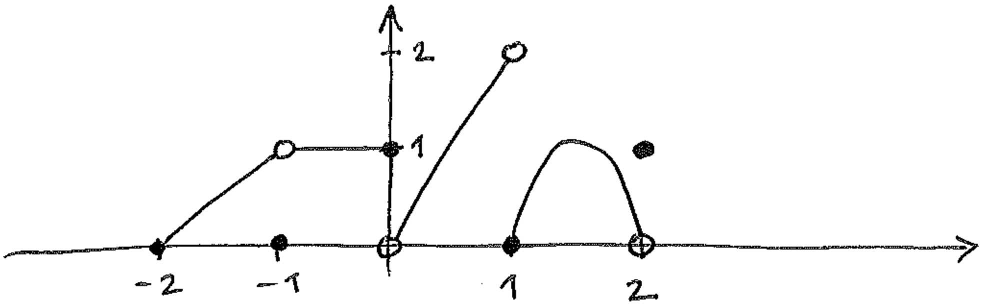
Analys 1, MVE535, vt 2019, Övning 2.2

Ex. Funktionen g har följande utseende



I vilka punkter har g en hävbar diskontinuitet, och hur bör g omdefinieras i dessa punkter för att bli kontinuerlig där?

Lösn.: Hävbar diskontinuitet i $x=-1$, $x=2$

Omdefiniera g som: $g(-1)=1$, $g(2)=0$

Ex. Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} & \text{om } 0<x<1, \\ a\sqrt{x}+bx & \text{om } 1\le x\le 4, \\ \dfrac{8-4\sqrt{x}}{4-x} & \text{om } x>4. \end{cases}$$

blir kontinuerlig på intervallet $(0,\infty)$.

Lösn.: f redan kont. på $(0,1)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$.

Vill bestämma a, b så att f blir kont. i $x=1$ och $x=4$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+x-2=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x} = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = a\sqrt{1} + b = a + b$$

$f(x)$ kont. i $x = 1$ om $a + b = 3$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = a\sqrt{4} + b \cdot 4 = 2a + 4b$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{8 - 4\sqrt{x}}{4 - x} = \lim_{x \to 4^+} \frac{4(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(4-x)(2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{4(4-x)}{(4-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{4}{2+\sqrt{4}} = 1$$

$f(x)$ kont. i $x = 4$ om $2a + 4b = 1$

Vi har ekv. systemet: $\begin{cases} a + b = 3 \Leftrightarrow a = 3 - b \\ 2a + 4b = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2(3-b) + 4b = 6 + 2b = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a = 3 - \left(-\frac{5}{2}\right) = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

$\therefore$ $a = 11/2$, $b = -5/2$

<u>Ex</u>. Visa att ekvationen $x^3 - 15x + 1 = 0$ har tre rötter i intervallet $[-4, 4]$.

<u>Lösn.</u>: Låt $f(x) = x^3 - 15x + 1$. f polynom $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f kont. på $[-4, 4]$.

<u>Strategi</u>: Använd satsen om mellanliggande värden (smv)

$$f(-4) = (-4)^3 - 15(-4) + 1 = -64 + 60 + 1 = -3 < 0$$

$f(-3) = (-3)^3 + 15\cdot 3 + 1 = -27 + 46 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-4) < 0,\ f(-3) > 0 \\ f \text{ kont.} \end{array}\right. \overset{\text{smv}}{\Longrightarrow} \exists \text{ nollställe i } [-4,-3]$$

$f(-2) = (-2)^3 + 15\cdot 2 + 1 = -8 + 31 > 0$

$f(-1) = -1 + 15 + 1 > 0$

$f(0) = 0 + 0 + 1 > 0$

$f(1) = 1 - 15 + 1 < 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) > 0,\ f(1) < 0 \\ f \text{ kont.} \end{array}\right. \overset{\text{smv}}{\Longrightarrow} \exists \text{ nollställe i } [0,1]$$

$f(4) = 4^3 - 15\cdot 4 + 1 = 65 - 60 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) < 0,\ f(4) > 0 \\ f \text{ kont.} \end{array}\right. \overset{\text{smv}}{\Longrightarrow} \exists \text{ nollställe i } [1,4]$$

Bonus: Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}$$

om det existerar. Om det inte existerar, är det lika med ∞, $-\infty$, varken eller?

Lösn.: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x-(\cancel{x^2}-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}} =$$

$$= \left\{ \sqrt{x^2} = |x| \right\} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}} + |x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} =$$

$$= \left\{ |x| = -x \text{ då } x < 0 \right\} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{4}{-(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = \underline{\underline{-2}}$$