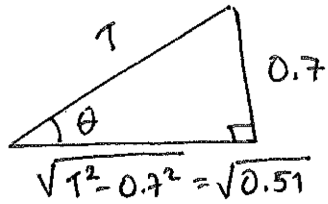
Analys 1, MVE535, vt 2019, Övning 4.1

Ex. Beräkna $\cos(\arcsin(0.7))$

Lösn.:



$$\Rightarrow \cos(\arcsin(0.7)) = \sqrt{0.51}$$

$\theta = \arcsin(0.7)$

Ex. Beräkna $\arcsin(\cos(40°))$

Lösn.: $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$

$$\Rightarrow \arcsin(\cos(40°)) = 90° - \arccos(\cos(40°)) = 90° - 40° = 50°$$

Ex. Derivera $y(x) = \arcsin\left(\frac{a}{x}\right) \quad (|x| > |a|)$

Lösn.:
$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \{x^2 = |x|^2\} =$$

$$= -\frac{a}{\frac{|x|^2 \sqrt{x^2 - a^2}}{|x|}} = -\frac{a}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Ex. Derivera $y(x) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$

Lösn.:
$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \cancel{2}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\cancel{a^2} + x^2}{a^2 + x^2} - \frac{\cancel{a^2}}{a^2 + x^2}}} \cdot \frac{ax}{(a^2 + x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{a^2 + x^2}}}{|x|} \cdot \frac{ax}{\cancel{\sqrt{a^2 + x^2}}\,(a^2 + x^2)} = \frac{ax}{|x|(a^2 + x^2)}$$

Ex. Man kan anta att förändringen av jordens befolkning är proportionell mot befolkningens storlek. Vi vet att jordens befolkning var 2560 miljoner 1950 och 3040 miljoner 1960. Under dessa antaganden, hur stor bör befolkningen vara år 2020?

Lösn.: Låt $B(t)$ = jordens befolkning efter t år och låt $t=0$ år 1950. Vi får ODE:n

$$\begin{cases} B'(t) = kB(t) \\ B(0) = 2560 \end{cases} \Rightarrow B(t) = 2560e^{kt}$$

År 1960 svarar mot $t=10 \Rightarrow B(10) = 3040 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2560e^{10k} = 3040 \Leftrightarrow k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{3040}{2560}\right) \quad (\approx 0.017185)$$

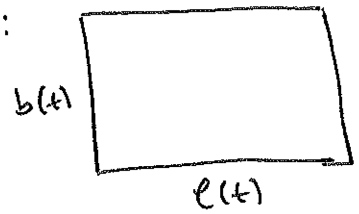
$$\Rightarrow B(t) = 2560e^{\frac{t}{10}\ln\left(\frac{3040}{2560}\right)}$$

År 2020 svarar mot $t = 70$:

$$B(70) = 2560e^{7\cdot\ln\left(\frac{3040}{2560}\right)} \approx 8524 \text{ miljoner}$$

Ex. Vid en viss tidpunkt är längden på en rektangel 16 m och bredden 12 m. Bredden ökar med 3 m/s. Hur snabbt ändras längden om arean av rektangeln förblir konstant?

Lösn.:



Givet: Vid någon tidpkt t_0 gäller att:

$b(t_0) = 12$ m , $\ell(t_0) = 16$ m

$b'(t_0) = 3$ m/s

För alla tidpunkter gäller:

$b(t) \cdot \ell(t) = \text{konstant}$

Sökt: $\ell'(t_0)$

Derivera båda leden i $b(t)\ell(t) = \text{konstant}$ m.a.p. t:

$$b'(t) \cdot \ell(t) + b(t) \cdot \ell'(t) = 0 \iff$$

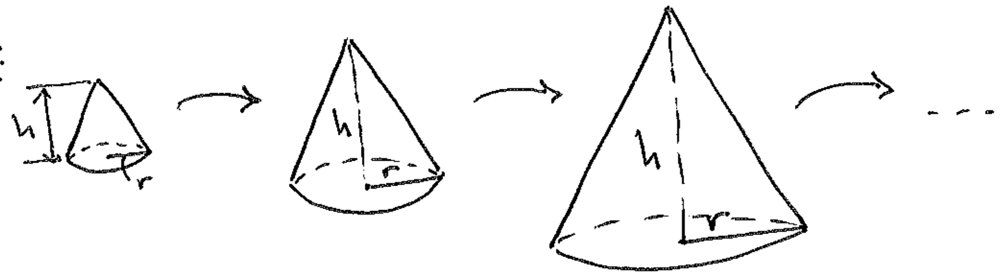
$$\iff \ell'(t) = -\frac{b'(t) \cdot \ell(t)}{b(t)} \implies$$

$$\implies \ell'(t_0) = -\frac{b'(t_0) \cdot \ell(t_0)}{b(t_0)} = -\frac{3 \cdot 16}{12} = -4$$

∴ Längden minskar med hastigheten 4 m/s

Ex. Sågspån faller i en hög, som har formen av en kon, med hastigheten 1/2 m³/min. Om vi antar att högen behåller formen av en kon vars höjd är lika med halva dess basdiameter, hur snabbt ökar högens höjd då högen är 3 m hög?

Lösn.:



Givet: $h(t) = r(t) \quad \forall t > 0$, $V'(t) = \frac{1}{2}$ m³/min $\forall t > 0$

Sökt: $h'(t)$ då $h = 3$ m

Vet att: $V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 \cdot h(t) = \{r = h\} = \frac{\pi}{3} h(t)^3$

$$\Rightarrow V'(t) = \pi h(t)^2 \cdot h'(t) \Leftrightarrow h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h(t)^2}$$

$$\Rightarrow h'(t)\Big|_{h=3} = \left(\frac{V'(t)}{\pi h(t)^2}\right)\Big|_{h=3} = \frac{1/2}{\pi \cdot 3^2} = \underline{\underline{\frac{1}{18\pi}}} \text{ m/min.}$$