

Analys 1, MVE535, vt2019, Övning 4.2

Ex. Använd differentiering till att bestämma den ungefärliga förändringen i funktionen $f(x) = \sqrt{3x+1}$:s värde då x ökar från 1 till 1.08. Vad har funktionen för approximativt värde efter förändringen?

Lös.: $\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \Delta f \approx \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \cdot \Delta x$$

$$f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{3+1}} = \frac{3}{4}, \quad \Delta x = 1.08 - 1 = 0.08$$

$$\Rightarrow \Delta f \approx f'(1) \cdot \Delta x = \frac{3}{4} \cdot 0.08 = 3 \cdot 0.02 = \underline{\underline{0.06}}$$

(dvs f 's värde ökar med ca 0.06)

$$f(1) = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 2$$

$$\therefore f(1.08) \approx f(1) + \Delta f = 2 + 0.06 = \underline{\underline{2.06}}$$

Ex. Avgör om funktionen $f(x) = x^3 + x - 4$ har några lokala eller globala extremvärden på intervallet (a, b) och bestäm i så fall dessa.

Lös.: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$ är strängt växande på (a, b)

(a, b) öppet intervall, f saknar singulära punkter

$\therefore f$ har inga extremvärden på (a, b)

Ex. Avgör om funktionen $f(x) = \frac{1}{x-1}$ har några lokala eller globala extremvärden på intervallet $[2, 3]$ och bestäm i så fall dessa.

Lös.: $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ och väldef. på $[2, 3]$

$\Rightarrow f$ strängt avtagande på $[2, 3]$

$[2, 3]$ slutet intervall:

$$f(2) = \frac{1}{2-1} = 1 \text{ globalt max.}$$

$$f(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \text{ globalt min.}$$

Ex. Lokalisera och klassificera alla lokala och globala extremvärden till funktionen $f(x) = x - 2 \arctan(x)$.
Skissa grafen till f .

Lös.: $f(x) = x - 2 \arctan(x)$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1+x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

		-1		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow x = -1$ max. pkt. , $x = 1$ min. pkt.

Lokalt oder globalt?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - 2 \underbrace{\arctan(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 2 \underbrace{\arctan(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}} \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 - 2 \arctan(-1) = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -1 + \frac{\pi}{2} \text{ lok. max.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 2 \arctan(1) = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \\ &= 1 - \frac{\pi}{2} \text{ lok. min.} \end{aligned}$$



