Analys 1, MVE535, vt2019, Övning 5.1

Ex. Avgör på vilka intervall funktionen $f(x) = (2+2x-x^2)^2$ är konvex eller konkav och bestäm ev. inflektionspunkter.

Lösn.: f 2 ggr. deriverbar och def. på $\mathbb{R} = D_f$

$$f'(x) = 2(2+2x-x^2)\cdot(2-2x) = (4-4x)(2+2x-x^2)$$

$$f''(x) = -4(2+2x-x^2) + (4-4x)(2-2x) =$$

$$= -8-8x+4x^2+8-8x-8x+8x^2 = 12x^2-24x =$$

$$= 12x(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \iff 12x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

Stewart

$\therefore$ f konvex $\forall x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

f konkav $\forall x \in [0, 2]$

$x = 0$ och $x = 2$ inflektionspunkter

Ex. Använd andraderivatatestet, om möjligt, till att klassificera de kritiska punkterna till:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$

Lösn.: (a) $f'(x) = \dfrac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1 \quad \text{kritiska punkter}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x\cancel{(1+x^2)}(1+x^2+2(1-x^2))}{(1+x^2)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(1-3)}{2^3}>0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{min-punkt}$$

$$f''(1)=\frac{2\cdot(1-3)}{2^3}<0 \Rightarrow x=1 \quad \text{max.punkt.}$$

(b) $$f'(x)=\frac{1\cdot 2^x-x\cdot(2^x)'}{(2^x)^2}=\left\{(2^x)'=\left(e^{x\ln(2)}\right)'=2^x\cdot\ln(2)\right\}=$$

$$=\frac{2^x-x\cdot 2^x\cdot\ln(2)}{(2^x)^2}=\frac{\cancel{2^x}(1-x\cdot\ln(2))}{(2^x)^{\cancel{2}}}=\frac{1-x\cdot\ln(2)}{2^x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x\cdot\ln(2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln(2)} \quad \text{Kritisk punkt}$$

$$f''(x)=\frac{-\ln(2)\cdot 2^x-(1-x\cdot\ln(2))\cdot 2^x\ln(2)}{(2^x)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2^x}\cdot\ln(2)(-1-1+x\cdot\ln(2))}{(2^x)^{\cancel{2}}}=\frac{\ln(2)(x\ln(2)-2)}{2^x}$$

$$f''\left(\frac{1}{\ln(2)}\right)=\frac{\ln(2)\left(\frac{1}{\ln(2)}\cdot\ln(2)-2\right)}{2^{1/\ln(2)}}=\frac{-\overbrace{\ln(2)}^{>0}}{\underbrace{2^{1/\ln(2)}}_{>0}}<0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\ln(2)} \quad \text{max. pkt.}$$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)}$

Lösn.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)\sin(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

Lösn.: $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln(x)}\right)^{\leftarrow[\infty-\infty]} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} - \cancel{1}}{1\cdot\ln(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\ln(x)}{x\ln(x)+x-1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sin(\pi x/2)}{(\ln(x))^2}$

Lösn.: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{(\ln(x))^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{\pi x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{4\ln(x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \pi x\cdot\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{4\cdot\frac{1}{x}} =$

$= -\dfrac{\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} = \dfrac{\pi^2}{8}$