Analys 1, MVE535, vt2019, Övning 7.1

Efter att ha studerat och lärt oss hantera gränsvärden introducerade vi två mycket centrala begrepp:

<u>Definition</u>: Låt f vara en funktion och låt $a \in D_f$.

(i) f sägs vara <u>kontinuerlig</u> i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(ii) f sägs vara deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existerar}$$

<u>Ex.</u> Beräkna derivatan av $f(x) = x^{1/3}$ m.h.a. derivatans definition. (Obs! l'Hospitals regel får ej användas!)

<u>Lösn.</u>: $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^{1/3} - x^{1/3}}{h} \right) \cdot \frac{\left((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3} \cdot x^{1/3} + x^{2/3} \right)}{\left((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3} \cdot x^{1/3} + x^{2/3} \right)} =$$

$$= \{ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x} + \cancel{h})^{3/3} - \cancel{x}^{3/3}}{\cancel{h}\left((x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3} \cdot x^{1/3} + x^{2/3} \right)} =$$

$$= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3} \cdot x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

Ex. Låt $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$

(a) Visa att f är kontinuerlig i $x = 0$.

(b) Beräkna $f'(0)$

Lösn.: (a) f kont. i $x=0$ om $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \{ x \to 0 \Rightarrow x \neq 0 \} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x + 2x^2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{begränsad}} \right) = \{ 0 + 2 \cdot 0^2 \cdot \text{Begr.} \} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ kont. i } x = 0 \quad \blacksquare$$

(b) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \{ h \to 0 \Rightarrow h \neq 0 \} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 2h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + 2h \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{begränsad}} \right) = 1$$

Till skillnad från gränsvärdesreglernas enkelhet, visade sig motsvarande deriveringsregler (produkt-, kvot- och kedjeregeln) vara ganska krångliga. Efter att ha lärt oss dessa "nya" regler tillämpade vi dem på de trigonometriska funktionerna.

Därefter var det "äntligen" dags för lite tillämpningar.

Ex. Beräkna derivatan till:

(a) $\dfrac{1}{\tan^2(x)}$ (b) $\arcsin(e^{x^2})$ (c) $\dfrac{x}{\arctan(x^2)}$

Lösn.: (a) $D\left(\dfrac{1}{\tan^2(x)}\right) = D\left((\tan(x))^{-2}\right) =$

$$= -2(\tan(x))^{-3} \cdot D\tan(x) = -\frac{2}{\tan^3(x)\cdot\cos^2(x)}$$

(b) $D(\arcsin(e^{x^2})) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}} \cdot D(e^{x^2}) = \dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$

(c) $D\left(\dfrac{x}{\arctan(x^2)}\right) = \dfrac{1\cdot\arctan(x^2) - x\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x}{(\arctan(x^2))^2} =$

$$= \frac{(1+x^4)\arctan(x^2) - 2x^2}{(1+x^4)(\arctan(x^2))^2}$$

Ex. En kopp varm choklad med temperaturen 80°C serveras på ett kafé där rumstemperaturen är 20°C. Efter en halvtimme har chokladen svalnat till 60°C.

(a) Vilken temperaturen har chokladen efter att ytterligare 30 min. har passerat?

(b) Hur lång tid efter att koppen har serverats kommer chokladen att ha svalnat till 40°C?

Lösn.: Låt $T(t)$ = temp. choklad t h efter servering.

Newtons avsvalningslag ger oss ODE:n

$$\begin{cases} T'(t) = k(T(t)-20) \\ T(0) = 80 \end{cases}$$

Låt $y(t) = T(t) - 20 \Rightarrow y'(t) = T'(t)$, $y(0) = 80-20 = 60$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(0) = 60 \end{cases} \overset{\text{sats}}{\Longrightarrow} y(t) = 60e^{kt}$$

$$\Rightarrow T(t) - 20 = 60e^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 60e^{kt} + 20$$

Vet att: $T(0.5) = 60 \Leftrightarrow 60e^{t/2} + 20 = 60 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{k/2} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore T(t) = 60\,e^{2t\ln(2/3)} + 20$$

(a) $T(1) = 60e^{2\ln(2/3)} + 20 = 60 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 20 =$

$$= \frac{60 \cdot 4}{9} + 20 = \frac{20 \cdot 4}{3} + \frac{20 \cdot 3}{3} = \frac{140}{3} \quad (\approx 46.7^\circ C)$$

(b) Söker t så att $T(t) = 40 \Leftrightarrow 60e^{2t\ln(2/3)} + 20 = 40$

$$\Leftrightarrow e^{2t\ln(2/3)} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2t\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

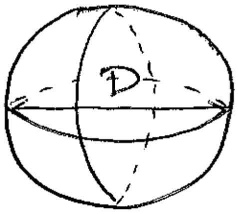
$$\therefore t = \frac{\ln(1/3)}{2\ln(2/3)} \quad (\approx 1.35 \text{ h} \approx 81 \text{ min.})$$

<u>Ex.</u> En snöboll smälter på ett sådant sätt att dess ytarea minskar med hastigheten 1 cm²/min.

Hur snabbt minskar diametern då radien är 5cm?

<u>Ledning</u>: En sfär med radie r har ytarean $A = 4\pi r^2$.

<u>Lösn.</u>:



<u>Givet</u>: $\dfrac{dA}{dt} = -1 \text{ cm}^2/\text{min}$

<u>Sökt</u>: $\left.\dfrac{dD}{dt}\right|_{D=10\text{cm}}$

Vet att: $A(t) = 4\pi r(t)^2 = 4\pi \left(\dfrac{D(t)}{2}\right)^2 = \pi D(t)^2$

$$\Rightarrow A'(t) = 2\pi D(t) \cdot D'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D'(t) = \frac{A'(t)}{2\pi D(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. D'(t) \right|_{D=10\text{cm}} = \frac{-1}{2\pi \cdot 10} = -\frac{1}{20\pi} \text{ cm/min.}$$

Dugga 3, uppg. 15:

Ex. Bestäm alla asymptoter till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot \arctan(x)}{3x+1}$$

Lösn.: I. Lodräta: ...

II. Vågräta: Finns ej!

III. Sneda:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 \arctan(x)}{x(3x+1)} = \frac{\arctan(x)}{3+\frac{1}{x}} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{6}$$

$$f(x) - \frac{\pi}{6}x = \frac{x^2 \arctan(x)}{3x+1} \cdot \frac{6}{6} - \frac{\pi x}{6} \cdot \frac{3x+1}{3x+1} =$$

$$= \frac{\cancel{6} \, 6x^2 \arctan(x) - 3\pi x^2 - \pi x}{6(3x+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{6}x^2\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{6}(3x+1)} - \frac{\pi x}{6(3x+1)} =$$

$$= \frac{x\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right)}{3+\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{6\left(3+\frac{1}{x}\right)}$$

$[\infty \cdot 0]$ ← Beräkna med l'Hospital