

Analys 1, MVE535, vt 2019, Övning 8.1

Ex. För vilket eller vilka värden på det reella talet k har ekvationen $e^{2x} = k\sqrt{x}$

exakt en lösning? Motivera väl!

Lös.: "Rita grafen till $f(x) = e^{2x}/\sqrt{x}$ " minus $\frac{1}{2}$ steg 2 och steg 4.

Steg 1: $D_f = (0, \infty)$

Steg 2: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = \infty$$

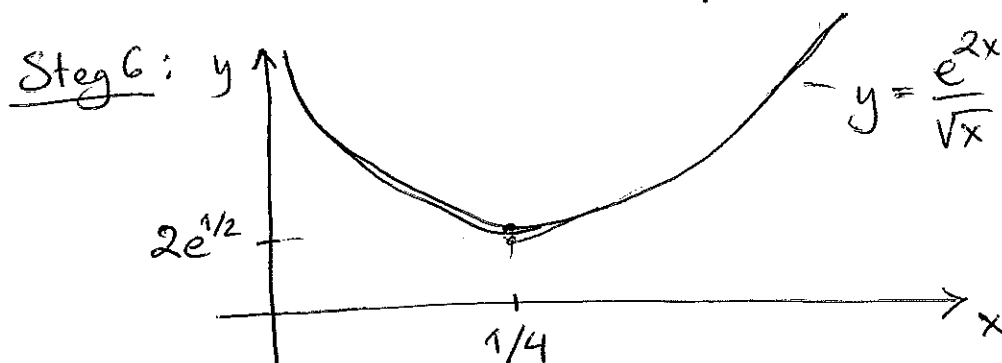
Steg 3: $f'(x) = \frac{2e^{2x}\sqrt{x} - e^{2x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x} =$
 $= \frac{4xe^{2x} - e^{2x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{2x}(4x-1)}{2x^{3/2}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ kritisk punkt}$$

Steg 4: Behövs ej

Steg 5:

	0		1/4		∞
f'		-	0	+	
f	∞	$\searrow$	$2e^{1/2}$	$\nearrow$	∞



$\therefore$ Då $\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$ är definierad på $(0, \infty)$ och går mot ∞ då $x \rightarrow 0^+$ och $x \rightarrow \infty$ kommer $k = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$ bara att ha en lösning endast då k är $\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$'s globala min. värde, dvs

$$\underline{k = 2e^{1/2}}$$

Ex. Visa att funktionen

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

bara antar två värden.

Lös.: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \text{konstant men } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ så}$$

$$f(x) = \begin{cases} C_1 & \text{om } x < 0 \\ C_2 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

där C_1 inte behöver vara lika med C_2 .

Låt oss kolla:

$$f(-1) = 2 \arctan(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{om } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

Ex. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

Lösn.: Vill bestämma max. och min. (globalt)

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \frac{2x - x \ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{x(2 - \ln(x^2 + 1))}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 - \ln(x^2 + 1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \notin D_f \text{ Falsk rot!}$$

$$2 - \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = (e^2 - 1)^{1/2}, \quad x_3 = -(e^2 - 1)^{1/2}$$

$$f(x_2) = f((e^2 - 1)^{1/2}) = \frac{\ln((e^2 - 1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 1)}{\sqrt{(e^2 - 1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 1}} = \frac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

$$\text{På samma sätt: } f(-(e^2 - 1)^{1/2}) = \frac{2}{e}$$

Lokala eller globala?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\ln(1)}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(x^2 + 1)}{|x| = x \text{ da } x > 0}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0} = 0$$

På samma sätt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\therefore V_f = \left(0, \frac{2}{e}\right]$$