

Analys 1, MVE 535, vt2019, Övning 8.2

Ex. Beräkna $\sin(2 \arctan(\frac{3}{4}))$

Lös.: Vet att: $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(2 \arctan(\frac{3}{4})) = 2 \sin(\arctan(\frac{3}{4})) \cos(\arctan(\frac{3}{4})) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{4} \quad \text{3} \\ \theta \\ \theta = \arctan(\frac{3}{4}) \end{array} \right\} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Ex. Låt $f(x) = x + \arctan(x)$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{4})$.

Lös.: I. f injektiv: $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ strängt växande på } \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv på } \mathbb{R} = D_f$$

$$\text{II. } \underline{(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{4})}: f(1) = 1 + \arctan(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1 + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1 + \frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{f'(1)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1^2}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Ex. Beräkna det kortaste avståndet från origo till kurvan $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lösn.: En godtycklig punkt på kurvan har koordinaterna $(x, \frac{1}{\sqrt{x}})$. Avståndet till $(0,0)$ blir därmed

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

Vill minimera d . Observera att det x för vilket d är minimal är samma x för vilket d^2 är minimal.

∴ Minimera: $d^2 = x^2 + \frac{1}{x} = f(x)$, med $D_f = (0, \infty)$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \leftarrow \text{nga singulära punkter}$$

Kritiska punkter:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{lokal min. pkt.}$$

"Randpunkter":

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{global min. punkt}$$

$$f\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right) = \left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)} = \frac{1}{2^{2/3}} + 2^{1/3} \cdot \frac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{3}{2^{2/3}}$$

$$\therefore \text{Minsta avståndet: } d = \sqrt{f\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \text{ l.e.}$$

Ex. Beräkna antiderivatan till

$$\frac{x^2 + x^{-1}}{x^3 + x^{-3}}$$

$$\text{Lös. : } \frac{x^2 + x^{-1}}{x^3 + x^{-3}} = \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x^3 + \frac{1}{x^3}} \cdot \frac{x^3}{x^3} = \frac{x^5 + x^2}{x^6 + 1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 + x^{-1}}{x^3 + x^{-3}} dx = \int \frac{x^5 + x^2}{x^6 + 1} dx =$$

$$= \int \frac{x^5}{x^6 + 1} dx + \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{6x^5}{x^6 + 1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1 + (x^3)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \ln(x^6 + 1) + \frac{1}{3} \arctan(x^3) + C$$

