Analys I, MVE535, vt2019, Föreläsning 1.1

Idag:

* Algebraiska förenklingar
* Olikheter
* Absolutbelopp
* Linjer och cirklar

Algebraiska förenklingar: (Review algebra)

Följande viktiga identiteter förväntas ni kunna utantill:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}\ \text{Kvadreringsreglerna}$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad \text{Konjugatregeln}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}\right\}\ \text{Kuberingsreglerna}$$

$$\left.\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}\right\}\ \text{Faktoruppdelningar}$$

Dessa används ständigt då man utvecklar potenser eller faktoriserar.

Ex. Faktorisera $12x^4-2x^5-18x^3$

Lösn.: $12x^4-2x^5-18x^3 = \{\text{bryt ut så mycket som möjligt}\} =$
$= 2x^3(6x-x^2-9) = -2x^3(x^2-2\cdot x\cdot 3+9) = -2x^3(x-3)^2$

Polynom – pq-formeln, kvadratkompl., faktorisering
(Detta kan ni sedan tidigare)

Olikheter: (Review algebra)

En olikhet kan betraktas som en ekvation där likhetstecknet är utbytt mot ett olikhetstecken.

Viktig skillnad för olikheter:
Då man multiplicerar eller dividerar en olikhet med ett negativt tal så vänds olikhetstecknet.

Ex. Lös olikheten $-3x+5 \leq 8$

Lösn.: $-3x+5 \leq 8 \iff -3x \leq 3 \iff x \geq -1$

alltså → $\therefore \quad x \in [-1, \infty)$

Utom i mycket enkla fall, som t.ex. föregående ex., måste man använda sig av en s.k. teckentabell.

Ex. Lös olikheten $x^2+2x \geq 0$

Lösn.: $x^2+2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$

		-2		0	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$		$+$
$x(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\therefore \quad x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$$

Absolutbelopp: (Review algebra)

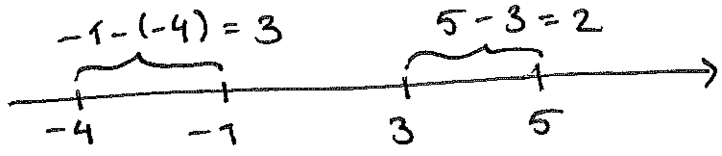
Definition: Absolutbeloppet, $|x|$, av $x \in \mathbb{R}$ definieras som $\quad |x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

Ex. $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Varför införa ett sådant begrepp?

Svar: För att få en matematisk beteckning för begreppet avstånd.

För två godtyckliga tal/pkter. på tallinjen ges avståndet dem emellan av det större talet minus det mindre



Men säg att det inte är så enkelt att avgöra vilket av de två talen som är störst/minst, t.ex. $\pi^{\sqrt{8}}$ och $(\sqrt{\pi})^e$, eller två abstrakta tal $a, b \in \mathbb{R}$.

Antag att vi väljer fel då vi ska beräkna avståndet mellan två tal. Vad får vi istället?

$$3 - 5 = -2 \quad , \quad -4 - (-1) = -3$$

Svar: Vi får det "verkliga" avståndet med ombytt tecken!

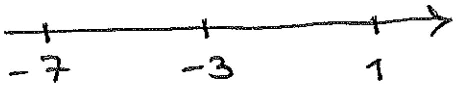
Alltså betecknar $|a - b|$ avståndet mellan talen a och b, oberoende av vilket som är störst/minst

$$|5 - 3| = |2| = 2 \quad , \quad |3 - 5| = |-2| = -(-2) = 2$$

Uppgiften: "Finn alla tal x sådana att avståndet från x till −3 är 4" formuleras matematiskt som:

<u>Ex.</u> Lös ekvationen $|x+3| = 4$ $\quad (|x+3| = |x-(-3)|)$

<u>Lösn.</u>:



$\Rightarrow x_1 = -7, \; x_2 = 1$

<u>Kvadratrötter</u>: (Review algebra)

<u>Definition</u>: Låt $a \geq 0$. Med <u>kvadratroten ur a</u>, $\sqrt{a} = a^{1/2}$, menas det <u>icke-negativa</u> reella tal, vars kvadrat är a.

<u>Ex.</u> $\sqrt{4} = 2$ <u>inte</u> -2 eller ± 2

Däremot har ekvationen $x^2 = 4$ lösningen $x = \pm 2$

Märkligt? $x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} = 2$

<u>Påstående</u>: $\sqrt{x^2} \neq x$ för alla $x \in \mathbb{R}$

<u>Motex.</u>: Antag $x < 0$, säg $x = -3$. I så fall

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Vi har alltså att: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

$\therefore \; x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Två andra mycket vanliga fel:

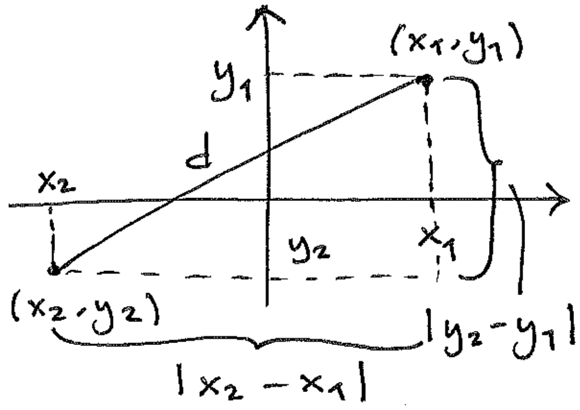
(i) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\qquad$ EJ SANT!

(ii) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Motex.: $a=16$, $b=9$. Räkna ut VL och HL för dessa värden!

Linjer och cirklar: (Review analytic geometry)

Om (x_1,y_1) och (x_2,y_2) är två punkter i planet ges avståndet mellan dem av Pythagoras sats



$$d=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \leftarrow \text{avståndsformeln}$$

Definition: Grafen till en ekvation är mängden av alla punkter vars koordinater uppfyller ekvationen

Ex. Rita grafen till $x^2+y^2=2$

Lösn.: $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{2}$ ← avståndet från (x,y) till origo

$\therefore$ Cirkel med radie $\sqrt{2}$ och centrum i origo.

Detta motiverar:

Definition: Låt $a,b \in \mathbb{R}$, $r>0$ vara konstanter

(i) En cirkel är grafen till en ekvation av formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

(ii) En cirkelskiva är grafen till en ekvation av formen $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ eller $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$

(a,b) kallas cirkelns/cirkelskivans <u>centrum</u> och r dess <u>radie</u>

Slutligen har vi:

<u>Definition</u>: En <u>rät linje</u> är grafen till en ekvation av formen $y = kx + m$ där $k, m \in \mathbb{R}$ är konst.

<u>Fakta om räta linjer:</u>

- k kallas för linjens <u>lutning</u> (eng.: slope) och kan beräknas enligt

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

där (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är två punkter på linjen.

<u>VARNING!</u> I Stewart betecknas k med m!

(Stewart: $y = mx + b$)

- m beskriver y-koordinaten för den punkt där linjen skär y-axeln (eng.: y-intercept)

- För två räta linjer $y = k_1 x + m_1$, $y = k_2 x + m_2$ gäller att:

  (i) $k_1 = k_2 \Leftrightarrow$ linjerna är parallella

  (ii) $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow$ linjerna är vinkelräta (eng.: perpendicular)