Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 1.2

Idag:

* Ellipser
* Funktioner
* Nya fkner. ur gamla

Ellipser: (sid. 676-677)

Vi avslutade förra föreläsningen med att studera cirklar analytiskt. Dessa är ett specialfall av:

Definition: En ellips är grafen till en ekvation av formen

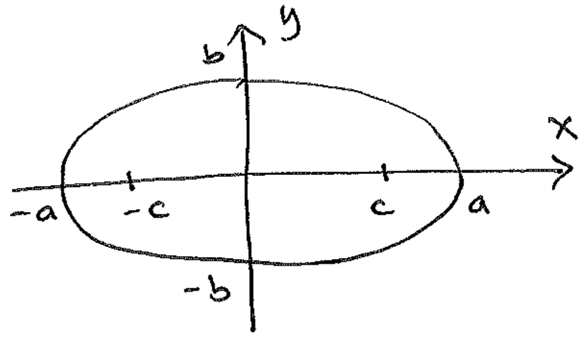
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{där } a, b > 0$$

(i) Om $a \geq b$ så $(\pm a, 0)$ ellipsens transversalpunkter (eng.: vertices) och $(\pm c, 0)$ där $c^2 = a^2 - b^2$ ellipsens brännpunkter (eng.: foci)

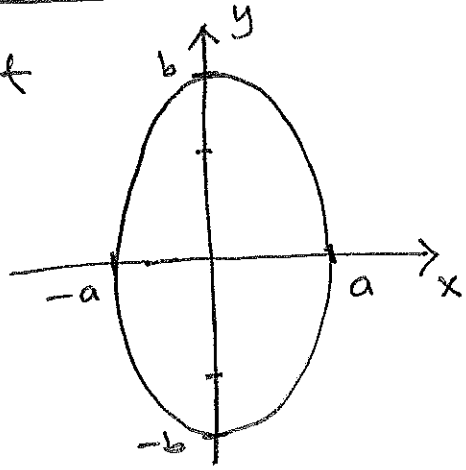
(ii) Om $b \geq a$ så $(0, \pm b)$ och $(0, \pm c)$ där $c^2 = b^2 - a^2$ ellipsens transversal- resp. brännpunkter.

Geometriskt svarar (i) och (ii) mot

(i)



(ii)



Brännpunkterna är intressanta då ellipsen utgörs av de punkter vars sammanlagda avstånd till brännpunkterna är konstant.

Funktioner: (1.1-1.2)

I många sammanhang förekommer olika beroende-samband naturligt.

Ex. För en partikel som färdas med en viss hastighet beror sträckan av tiden.

Ex. Glass-/ölförsäljningen på sommaren beror på antalet soltimmar

I matematiken modelleras sådana beroendesamband med hjälp av funktioner

Definition: En funktion, f, är en regel som mot varje element a i en mängd A, ordnar ett (och endast ett) element $f(a)$ i en annan mängd B. Vi säger då att f är en funktion från A till B och skriver $f: A \to B$

A kallas för f:s definitionsmängd (eng.: domain) och betecknas D_f. B kallas för f:s målmängd (eng.: codomain)

Strängt talat innehåller alltså en funktionsdeklaration tre saker:

(i) En regel, f

(ii) En definitionsmängd, D_f

(iii) En målmängd

Vi kommer endast att studera s.k. reellvärda funktioner. För dessa gäller att:

1. Målmängden är alltid $\mathbb{R}$

2. D_f är antingen $\mathbb{R}$, eller en delmängd av $\mathbb{R}$

<u>Slutsats</u>: Vi behöver endast f och D_f !

<u>Konvention</u>: Oftast brukar man strunta i att ange även D_f. I sådana sammanhang är det underförstått att D_f är största "rimliga" delmängd av $\mathbb{R}$.

<u>Ex</u>. $f(x) = x+1$, $D_f = \mathbb{R}$. $V_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x}$. $D_g = [0, \infty)$. $V_g = [0, \infty)$

minus

$h(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $V_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$k(x) = \sin(x)$. $D_k = \mathbb{R}$, $V_k = [-1, 1]$

$\ell(x) = 2^x$, $D_\ell = \mathbb{R}$, $V_\ell = (0, \infty)$

<u>Obs!</u> Då $h(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ definierar f och h samma regel men <u>inte</u> samma funktion då definitionsmängderna är olika!

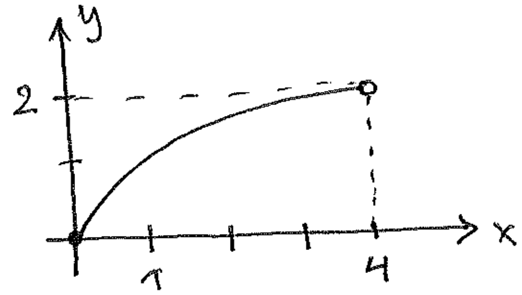
<u>Definition</u>: (i) Alla värden som en funktion f kan anta kallas för f:s <u>värdemängd</u> (eng.: range), betecknas V_f

(ii) <u>Grafen till en funktion</u> f, är grafen till ekvationen

$y = f(x)$. $\forall x \in D_f$ för alla

<u>Ex</u>. $f : [0,4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0, 4) \Rightarrow V_f = [0, 2)$



Definition: En funktion f kallas

(a) jämn om $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$

(b) udda om $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

Ex. $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ jämn

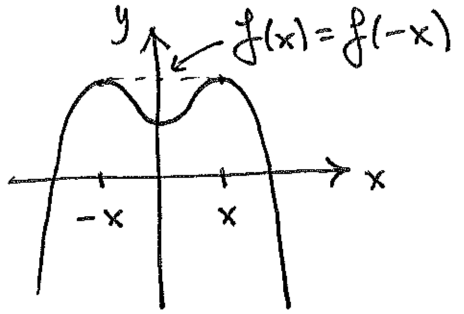
$g(x) = x|x|$, $g(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -g(x) \Rightarrow g$ udda

Obs! Innan vi ens börjar undersöka om f är jämn eller udda måste vi ha klart för oss att $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

Ex. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0, \infty)$. $x \in D_f \not\Rightarrow -x \in D_f$ så f kan inte vara jämn eller udda.

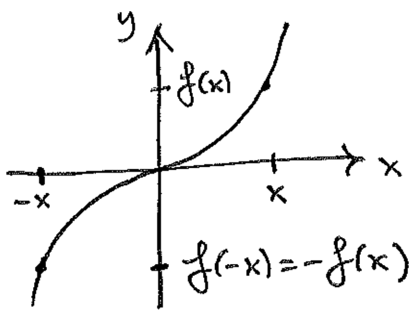
Hur ser grafen till en jämn/udda funktion ut?

Jämn:



Symmetrisk kring y-axeln!

Udda:



Spegling i både x- och y-axeln!

Nya funktioner ur gamla: (1.3)

Givet två funktioner f, g hur kan vi kombinera dessa för att få nya funktioner? De vanligaste sätten är:

(i) $f+g$. (ii) $f-g$, (iii) $f\cdot g$, (iv) f/g. (v) $k\cdot f$, $k\in\mathbb{R}$

Har följande definitionsmängder: ← både D_f och D_g

(i)-(iii) $D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

(iv) $D_{f/g}=D_f\cap D_g\setminus\{x\in D_g \mid g(x)=0\}$

(v) $D_{kf}=D_f$, $k\neq 0$, $D_0=\mathbb{R}$

<u>Ex.</u> $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=[0,\infty)$

$h(x)=x^2+\sqrt{x} \Rightarrow D_h=\mathbb{R}\cap[0,\infty)=[0,\infty)$

$m(x)=x^2/\sqrt{x} \Rightarrow D_m=[0,\infty)\setminus\{0\}=(0,\infty)$

<u>Ex.</u> $f(x)=\sqrt{-x}$, $g(x)=\sqrt{x}$, $D_f=(-\infty,0]$, $D_g=[0,\infty)$

$h(x)=\sqrt{-x}+\sqrt{x} \Rightarrow D_h=(-\infty,0]\cap[0,\infty)=\{0\}$

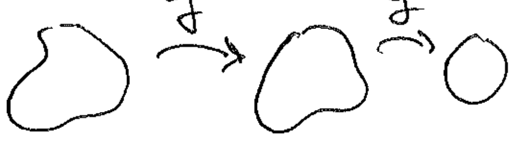
$m(x)=\sqrt{-x}/\sqrt{x} \Rightarrow D_m=\{0\}\setminus\{0\}=\emptyset$ ← tomma mängden $= \{\}$

Ytterligare ett vanligt sätt att få fram nya funktioner är genom sammansättning.

<u>Definition:</u> Givet två funktioner f och g låter vi $g\circ f$ beteckna <u>sammansättningen</u> av f och g, dvs

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$



Ex. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=e^x$. $D_f=[0,\infty)$, $D_g=\mathbb{R}$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}, \quad D_{g\circ f}=[0,\infty)$$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \sqrt{e^x} = e^{x/2}, \quad D_{f\circ g}=\mathbb{R}$$

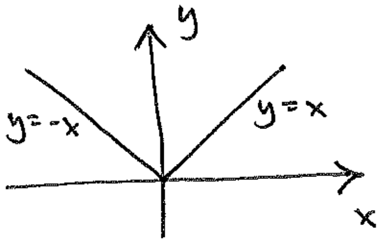
Obs! I allmänt gäller att $f\circ g \neq g\circ f$

Ex. $f(x)=\frac{1}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f\circ f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x, \quad D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Slutligen kan man också definiera funktioner styckvis, dvs olika algebraiska uttryck på olika intervall.

Ex. $f(x)=\begin{cases} x & \text{om } x\geq 0 \\ -x & \text{om } x<0 \end{cases}$ dvs $f(x)=|x|$



$D_f=\mathbb{R}$, $V_f=[0,\infty)$