Analys 1, MVE535, vt 2019, Föreläsning 2.1

Repetition:

- Definition: f injektiv om $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in D_f$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

- Definition: Om f injektiv så $\overset{\text{existerar}}{\exists}$ invers funktion f^{-1} s.a

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ och } f(f^{-1}(x)) = x, \ D_{f^{-1}} = V_f, \ V_{f^{-1}} = D_f$$

- Begränsa/stycka upp D_f om f ej injektiv för att kunna ta fram f^{-1}

- Definition: f exponentialfunktion om $f(x) = a^x$, $a > 0$
  $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = (0, \infty)$ (om $a \neq 1$)

- Sats: (Exponentiallagarna)

- Definition: Om $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ så $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ logaritmen i basen a. $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$, $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

- Sats: (Logaritmlagarna)

Idag:

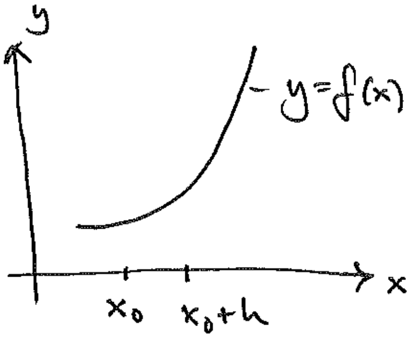
* Gränsvärden (avsnitt 2.1–2.3)
  - Motivering
  - Informell definition
  - Räkneregler

Kapitel 2: Gränsvärden och derivator

Avsnitt 2.1 och början av 2.2 försöker motivera varför gränsvärden är intressanta (tangenter, hastigheter).

Vi kör en egen (fast liknande) motivering!

Fråga: Varför hålla på och tjafsa om gränsvärden?



Vill beräkna lutningen i x_0

Definitionsförsök: $\text{lutning} = \left.\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|_{h=0}$ dvs stoppa in $h=0$ här

Illustrativt exempel: m = vikt myra, e = vikt elefant, $d=e-m$

$$e = m+d$$
$$e(e-m) = (m+d)(e-m)$$
$$e^2 - em = me - m^2 + de - dm$$
$$e^2 - em - de = me - m^2 - dm$$
$$e(\cancel{e-m-d}) = m(\cancel{e-m-d})$$
$$e = m$$

Vad går snett? Jo, $e-m-d=0$. dvs division med noll!

∴ En matematisk teori där division med noll är tillåtet är en matematisk teori där en myra och en elefant väger lika mycket!

Slutsats: Definitionsförsöket ovan suger hårt!!

Räddning: Gränsvärden

Även om $h=0$ är otillåtet kan vi tänka oss att h kommer "oändligt nära" noll, $h \to 0$.

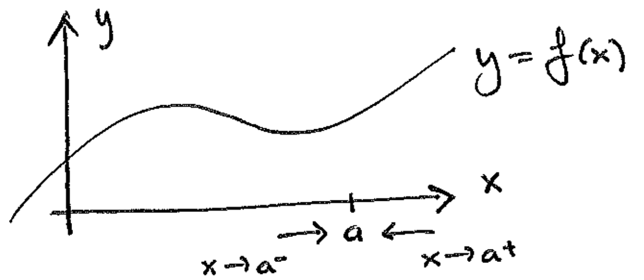
Brukar skapa stor förvirring då det oftast i praktiken är "samma sak".

Men konceptuellt är det <u>stor</u> skillnad mellan
$h=0$ och $h \to 0$

"Oändligt nära" har en exakt matematisk definition som dessvärre är mycket svårsmält.

Därför börjar vi med att först försöka få en intuitiv känsla för begreppet.

Finns två håll att närma sig en punkt $a \in \mathbb{R}$ på

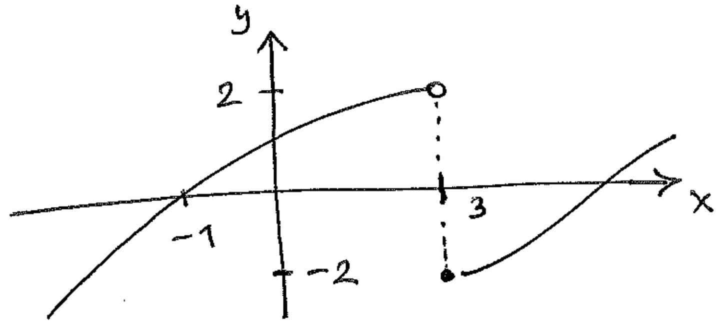


<u>"Definition"</u>: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f$:s <u>högergränsvärde</u> i a =

= det reella tal $f(x)$ kommer "oändligt nära" då x kommer "oändligt nära" a från höger

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f$:s <u>vänstergränsvärde</u> i a

<u>Ex.</u>

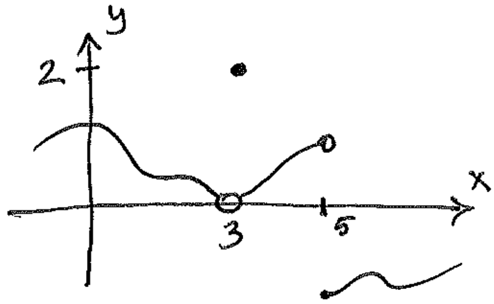


$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -2 \;,\; \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$$ ← oändligt nära

Definition: Om $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ säger vi att f har ett gränsvärde i $x=a$ och skriver detta $\lim_{x\to a} f(x)$.

Ex.



Då existerar ej $\nexists \lim_{x\to 5} f(x)$

(finns inte ett gränsvärde)

Hur är det med $x=3$?

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0 \;,\; \lim_{x\to 3^-} f(x) = 0$$

$\therefore \exists$ ett gränsvärde i $x=3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ ok!

Men $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{h\to 0} f(3+h) = 0 \neq 2 = f(3)$

Slutsats: Även om $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar betyder detta inte nödvändigtvis att $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

Finns det några funktioner för vilka detta alltid är sant?

Sats: (i) Om $P(x)$ är ett polynom så gäller att

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(ii) Om $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom och $Q(a) \neq 0$ så gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \qquad (*)$$

rationell funktion

Även om $Q(a)=0$ kan gränsvärdet i (*) fortfarande existera förutsatt att även $P(a)=0$

Ex. Beräkna $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

Lösn.: $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{4-4}{4-4} = "\frac{0}{0}"$

Förenkla / skriv om $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ innan du går i gräns

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

Alternativt

$$\frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} \xrightarrow[x\to -2]{} \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

Många fler ex. och tekniker på övningarna!

Följande räkneregler gäller för gränsvärden.

Sats: Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$ där $a, L, M \in \mathbb{R}$. Då gäller att:

(i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = L+M$

(ii) $\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = kL \quad \forall k\in\mathbb{R}$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = LM$

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M\neq 0$

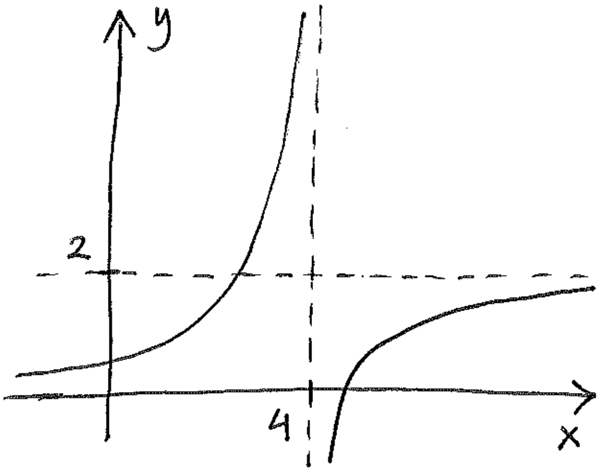
(v) Om $f(x)<g(x)$ $\forall x$ nära a, så är $L\leq M$.

Vi har hittills studerat gränsvärden av formen

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

där $a, L \in \mathbb{R}$. Men det finns även gränsvärden där $a = \infty$, $a = -\infty$, $L = \infty$ eller $L = -\infty$.

Ex.



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

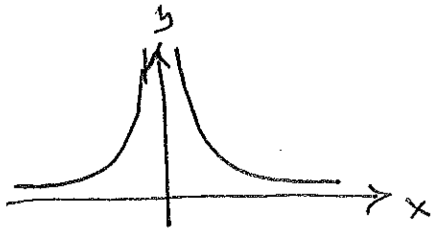
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \infty$$

Den vertikala linjen $x = 4$ kallas för en vertikal asymptot. De horisontella linjerna $y = 0$ och $y = 2$ kallas för horisontella asymptoter.

Obs! $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$



men vi säger ändå att det inte existerar ett gränsvärde i $x = 0$ då ∞ ej är ett reellt tal. Ibland kallas ∞ i denna typ av ex. för ett oegentligt gränsvärde.