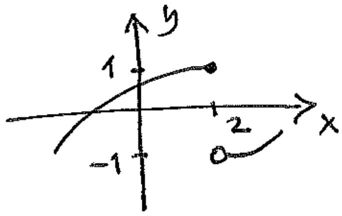
Analys 1, MVE 535, vt 2019, Föreläsning 2.2

Repetition:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f$:s <u>högergränsvärde</u> i a = det reella tal $f(x)$ kommer "oändligt nära" då x kommer "oändligt nära" a från höger.

  $\lim_{x \to a^-} f(x) = f$:s <u>vänstergränsvärde</u> i a

<u>Ex.</u>



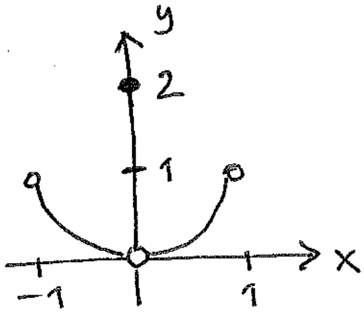
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$

- $\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$

  f har <u>ett</u> gränsvärde i $x = a$.

<u>Ex.</u> $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 2 & \text{om } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ men $f(0) = 2$

<u>Slutsats</u>: Ej alltid sant att $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

- <u>Sats</u>: (Räkneregler för gränsvärden)

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ kan även betrakta fall då $a = \pm\infty$ eller $L = \pm\infty$

<u>Idag</u>:

* Kontinuerliga funktioner
* Formell definition av gränsvärde

<u>Kontinuerliga funktioner</u>: (2.5)

Har sett att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ inte alltid gäller. De funktioner för vilka detta alltid är sant kallas för <u>kontinuerliga funktioner</u>.

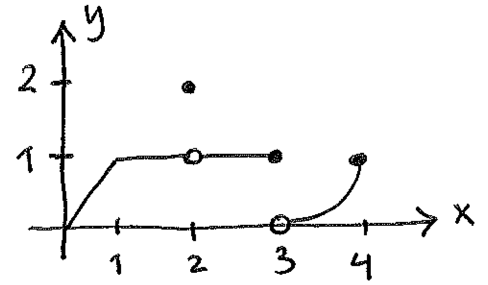
<u>Definition</u>: Låt f funktion och $a \in D_f$. Vi säger att f är <u>kontinuerlig i a</u> om:

(i) $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar (dvs $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$)

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

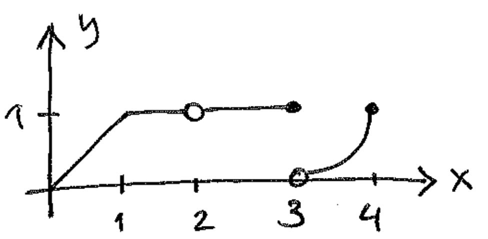
<u>Intuitivt</u>: f kontinuerlig i a om $f(x)$ <u>ej</u> gör något hopp då $x = a$. Vi kan alltså rita f utan att behöva lyfta pennan från pappret.

<u>Ex.</u>



f kont. i x, $\forall x \in D_f$ utom i $x = 2$ och $x = 3$

<u>Ex.</u>



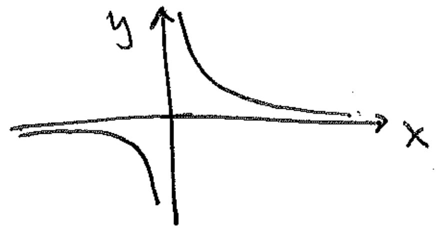
f kont. i x, $\forall x \in D_f$ utom $x = 3$
(f ej definierad i $x = 2$)

För att avgöra kontinuitet måste man alltså först bestämma D_f!

Om f är kont. i x, $\forall x \in D_f$ säger vi kort och gott att f är <u>kontinuerlig</u>.

Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ f kontinuerlig!



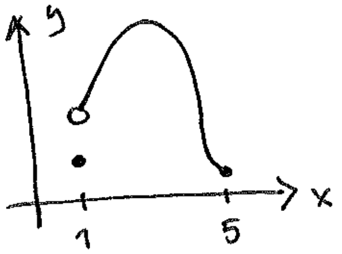
Ser att den intuitiva bilden av kontinuitet inte riktigt stämmer. Den förutsätter att D_f är <u>sammanhängande</u>, dvs inte uppdelad på flera delintervall.

Om D_f inte är sammanhängande så är f kontinuerlig om vi kan rita grafen till f utan att behöva lyfta pennan från pappret på varje delintervall för sig.

<u>Definition</u>: Om $D_f = [a, b]$ säger vi att f är kont. i $x = a$, $x = b$ om

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

<u>Ex.</u>



f kont. i $x = 5$

f ej kont. i $x = 1$

Det finns gott om kontinuerliga funktioner:

<u>Sats</u>: Följande klasser av funktioner är alla kont. där de är definierade:

(i) Polynom
(ii) Rationella funktioner
(iii) Trigonometriska funktioner
(iv) Exponentialfunktioner
(v) Logaritmfunktioner
(vi) Absolutbelopp

Kontinuerliga funktioner går att kombinera utan problem!

Sats: Antag att f, g kont. Då är även följande funktioner kont. där de är definierade:

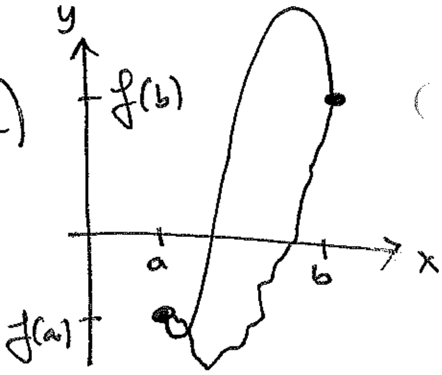
I. $f+g$ IV. f/g

II. $f-g$ V. $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$

III. $f \cdot g$ VI. $g \circ f$

Slutligen har kont. funktioner följande viktiga egenskap:

Sats: (Satsen om mellanliggande värden)
Antag att f är definierad och kont. på $[a, b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$



Formell definition av gränsvärde: (2.4) (svårt!)

Antag att $\lim_{x \to a} f(x) = L$ där $a, L \in \mathbb{R}$ $(*)$

Detta innebär att vi kan få avståndet mellan $f(x)$ och L hur litet som helst, genom att låta x komma tillräckligt nära a.

Avstånd mellan $f(x)$ och $L = |f(x) - L|$
— " — x och $a = |x - a|$

Vi kan likna vid en tävling mellan två deltagare A resp. B:

I. A får bestämma hur stort $|f(x)-L|$ max. får vara, dock inte noll.

II. B kontrollerar x och får bestämma hur stort $|x-a|$ får vara, dock inte noll.

III. A börjar, sedan är det B:s tur. Om B alltid lyckas uppfylla A:s krav, gäller (*), annars inte.

Ex. $\lim_{x \to 1} 2x+1 = 3$

A börjar: $|\overset{f(x)}{2x+1} - \overset{L}{3}| < 10^{-10}$

B:s tur: Eftersom $|2x+1-3| = |2(x-1)| = 2|x-1|$

väljer B $|x-1| < \frac{10^{-10}}{2}$

$\Rightarrow |f(x)-L| = 2|x-1| < 2 \cdot \frac{10^{-10}}{2} = 10^{-10}$ så A:s krav är uppfyllt

En gång till:

A börjar: $|(2x+1)-3| < 10^{-10^{10^{10}}}$

B:s tur: $|x-1| < \frac{10^{-10^{10^{10}}}}{2}$

$\Rightarrow |f(x)-L| = 2|x-1| < 2 \cdot \frac{10^{-10^{10^{10}}}}{2} = 10^{-10^{10^{10}}}$ ok!

Ännu en gång...

Vi ser att oavsett vad A väljer kommer B att kunna uppfylla A:s krav

Om det är såhär i det allmänna fallet, dvs hur litet värdet på $|f(x)-L|$ än får vara, så kan vi tvinga fram det genom att göra $|x-a|$ tillräckligt litet (men >0) säger vi att $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Mer precist betyder $\lim_{x \to a} f(x) = L$ att:

Oavsett hur litet tal $\varepsilon > 0$ vi än väljer, kan vi tvinga fram $|f(x)-L| < \varepsilon$ genom att låta $0 < |x-a| < \delta$ för något tal $\delta > 0$.

Ännu mer precist:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ om och endast om det för alla tal $\varepsilon > 0$ existerar något tal $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x-a| < \delta$ så medför detta att $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Matematiskt:

<u>Definition</u>: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,;\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$