Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 2.3

Repetition:

- Ej alltid sant att $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$

- Definition: f kontinuerlig i $a \in D_f$ om
  (i) $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar (dvs $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$)

  (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

- Sats: Det finns gott om kont. fkner. (polynom, ...)
- Sats: Kont. fkner. går att kombinera utan problem
- Sats: (Satsen om mellanliggande värden) Antag att f är def. och kont. på $[a,b]$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

- Definition: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ där $a, L \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Idag:

* Derivator och tangenter

* Derivator av potens- och exp. fkner

Derivator och tangenter: (2.7–2.8)

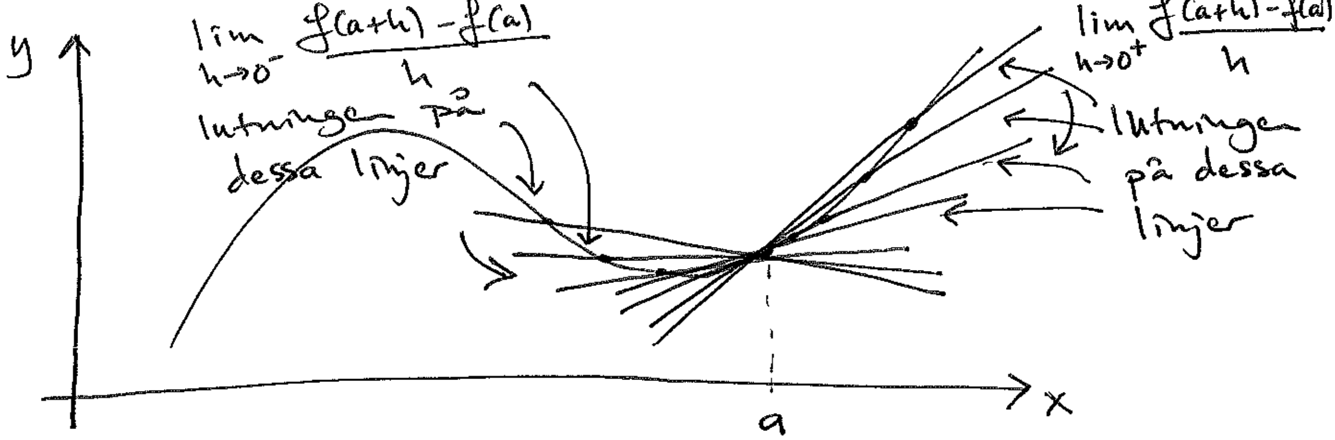
Definition: En funktion f sägs vara deriverbar i en punkt $a \in D_f$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (*)$$

existerar.

(*) betecknas $f'(a) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=a} f(x) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a)$

Geometriskt betecknar (*) lutningen i $x=a$.



Om $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ så

har tangenten till f:s graf i $x=a$ <u>en</u> lutning i $x=a$ och denna lutning kallas för f:s derivata i $x=a$.

<u>Ex.</u> Låt $f(x)=\sqrt{x}$ och beräkna $f'(2)$ med hjälp av (m.h.a.) derivatans definition.

<u>Lösn.</u>: $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{2}+\cancel{h})-\cancel{2}}{\cancel{h}(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ex. Låt $f(x) = \frac{3}{x}$ och beräkna $f'(x)$ m.h.a. derivatans definition. Använd detta till att beräkna tangenten till $y = \frac{3}{x}$ i punkten $(3,1)$.

Lösn.: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{3h}{x(x+h)}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} -\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)} = -\frac{3}{x^2}$

Tangentens lutning i $(3,1)$: $f'(3) = -\frac{1}{3} = k$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + m$

Linjen går genom $(3,1)$: $1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + m \Leftrightarrow m = 2$

$\therefore y = -\frac{1}{3}x + 2$

Vi har nu definierat två mycket centrala begrepp m.h.a. gränsvärden:

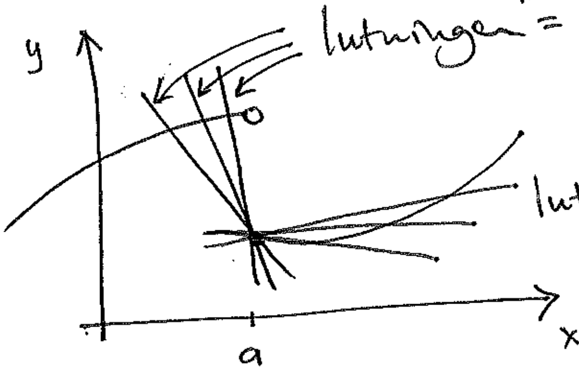
I. Kontinuitet

II. Deriverbarhet

Vad är relationen mellan dessa?

lutningen "=" $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ex.



lutningen "=" $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Inte en chans att $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\therefore$ f måste vara kontinuerlig i $a \in D_f$ för att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

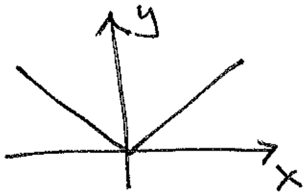
ska kunna existera!

<u>Sats</u>: Om f är deriverbar i $a \in D_f$ så är f även kontinuerlig i a (dvs II $\Rightarrow$ I)

Gäller det omvända, dvs f kont. i $a \in D_f$ medför att f även deriverbar i $a \in D_f$?

<u>Svar</u>: Nej!

<u>Motex.</u>: $f(x) = |x|$ <u>ej</u> deriverbar i $x = 0$



$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} =$$

$$= \{ h\to 0^+ \Leftrightarrow h>0 \Rightarrow |h| = h \} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \left\{ \begin{matrix} h\to 0^- \\ \Leftrightarrow \\ h<0 \end{matrix} \Rightarrow |h| = -h \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$

<u>Slutsats</u>: Kanter är kontinuerliga men ej deriverbara!

Derivator av potens- och exp.fkner.: (3.1)

Vi har sett att beräkning av derivator m.h.a. derivatans definition ofta är ganska jobbigt. Som tur är finns följande:

Sats: Om $f(x) = x^r$ där $r \in \mathbb{R}$ så gäller att

$$f'(x) = r x^{r-1}$$

Ex. (i) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

(ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} x^{2/3}$

(iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2}$

Därtill har vi följande deriveringsregler:

Sats: Om f, g är två deriverbara funktioner så gäller att:

(a) $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x) + g'(x) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

(b) $(f(x)-g(x))' = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} = f'(x) - g'(x)$

Ex. Derivera $f(u) = \frac{u\sqrt{u} - 3}{u^2}$ och förenkla resultatet.

Lösn.: $f(u) = \frac{u^{3/2} - 3}{u^2} = \frac{u^{3/2}}{u^2} - \frac{3}{u^2} = u^{-1/2} - 3u^{-2}$

$$\Rightarrow f'(u) = -\frac{1}{2} u^{-3/2} + 6u^{-3} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot u^3} - \frac{1}{2u^{3/2}} \cdot \frac{u^{3/2}}{u^{3/2}} = \frac{12 - u^{3/2}}{2u^3}$$

En annan klass av funktioner är exp-funktioner

$f(x) = a^x$, $a > 0$.

← (lång väg)

Från vår definition av talet e "följer":

<u>Sats</u>: $D(e^x) = e^x$

<u>Ex</u>. Beräkna derivatan av $f(x) = 2e^x + 3x + 5x^3$ och använd detta till att visa att grafen till ekv. $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ inte har någon tangent med lutning 2.

<u>Lösn.</u>: $f'(x) = 2e^x + 3 + 15x^2$

$\Rightarrow$ Lutning tangent $= 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x + 3 + 15x^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x + 15x^2 = -1$

Då VL > 0 $\forall x \in \mathbb{R}$ och HL < 0 så saknar denna ekv. lösningar

$\therefore$ Finns ej någon tangent med lutning 2 ∎