

Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 3.1

Repetition:

• Definition: f deriverbar i $a \in D_f$ om gränsvärdet

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existerar.

• Sats: f deriverbar i $a \in D_f \Rightarrow f$ kont. i a

• Motex.: f kont. i $a \in D_f$ medför inte nödvändigtvis att f är deriverbar i a . T.ex. $f(x) = |x|$ i $x=0$

• Sats: Om $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ så $f'(x) = r x^{r-1}$

• Sats: Om f, g två deriverbara fktner. så

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

• Sats: $D(e^x) = e^x$

Idag:

* Produkt- och kvotregeln

* Kedjeregeln

* Implicit derivering

Produkt- och kvotregeln: (3.2)

Om f, g två deriverbara funktioner så gäller

(till skillnad mot $\pm$) inte att ~~$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$~~ eller ~~$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$~~ . I stället har vi:

Sats: Antag att f, g deriverbara i $x \in D_f \cap D_g$.

Då gäller att:

$$\text{I. } (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{II. } \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \text{ om } f(x) \neq 0$$

$$\text{III. } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \text{ om } g(x) \neq 0$$

Bervis: I. $(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x) \text{ (*)}} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x)} \right) =$$
$$= f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(*) $g(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x)$ då g antas vara deriverbar i x och därmed även $\bar{a}$ kont. i x .

II. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h f(x) f(x+h)} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} - \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x) f(x+h)}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x) \text{ p.g.a. (*) ovan}} = -f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)^2}$$

$$(v) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) \stackrel{\text{I.}}{=} f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \stackrel{\text{II.}}{=} \\ = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \blacksquare$$

Ex. Beräkna derivatan till:

(a) $(x^3 + x^2)e^x$

(b) $\frac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

Lösn.: (a) $D((x^3 + x^2)e^x) \stackrel{\text{I.}}{=} D(x^3 + x^2) \cdot e^x + (x^3 + x^2)D(e^x) \\ = (3x^2 + 2x)e^x + (x^3 + x^2)e^x = (x^3 + 4x^2 + 2x)e^x$

(b) $D\left(\frac{x^2 + 1}{x^3 + x}\right) \stackrel{\text{III.}}{=} \frac{D(x^2 + 1)(x^3 + x) - (x^2 + 1)D(x^3 + x)}{(x^3 + x)^2} = \\ = \frac{2x(x^3 + x) - (x^2 + 1)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2}$

Finns ytterligare ett sätt att kombinera funktioner på, nämligen genom sammansättning:

Kedjeregeln: (3.4)

Sats: (Kedjeregeln) Antag att g är deriverbar i x och att f är deriverbar i $g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i x och

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ex. Beräkna derivatan till

(a) $e^{-x^2 - x}(2x + 1)^2$

(b) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x^3 + 1}}$

Lösn.: (a) $D(e^{-x^2 - x}(2x + 1)^2) =$

$$\begin{aligned}
&= D(e^{-x^2-x}) \cdot (2x+1)^2 + e^{-x^2-x} \cdot D((2x+1)^2) = \\
&= e^{-x^2-x} \cdot D(-x^2-x) \cdot (2x+1)^2 + e^{-x^2-x} \cdot 2(2x+1) \cdot D(2x+1) = \\
&= e^{-x^2-x} \left((-2x-1)(2x+1)^2 + 4(2x+1) \right) = \\
&= e^{-x^2-x} (2x+1) (4 - (2x+1)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad D\left((1 + \sqrt{x^3+1})^{1/3}\right) &= \frac{1}{3} (1 + \sqrt{x^3+1})^{-2/3} \cdot D((x^3+1)^{1/2}) = \\
&= \frac{1}{3} (1 + \sqrt{x^3+1})^{-2/3} \cdot \frac{1}{2} (x^3+1)^{-1/2} \cdot D(x^3) = \\
&= \frac{x^2}{3(1 + \sqrt{x^3+1})^{2/3} \cdot 2\sqrt{x^3+1}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^3+1} (1 + \sqrt{x^3+1})^{2/3}}
\end{aligned}$$

M.h.a. kedjeregeln kan vi nu även få fram en formel för $(f^{-1})'$ givet att vi vet f' , då

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow D(f(f^{-1}(x))) = D(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\therefore (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Om t.ex. $f(x) = e^x$ så $f^{-1}(x) = \ln(x)$ vilket ger

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Ex. Beräkna derivatan till:

$$(a) 2^{x^2} \cdot 3^{x^2}$$

$$(b) x^x$$

$$\text{Lös.}: D(2^{x^2} \cdot 3^{x^2}) = D((2 \cdot 3)^{x^2}) = D(e^{\ln(6^{x^2})}) =$$

$$= D(e^{x^2 \cdot \ln(6)}) = e^{x^2 \ln(6)} \cdot D(x^2 \ln(6)) = 6^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln(6)$$

$$(b) D(x^x) = D(e^{\ln(x^x)}) = D(e^{x \cdot \ln(x)}) =$$

$$= e^{x \cdot \ln(x)} \cdot D(x \cdot \ln(x)) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

Implicit derivering: (3.5)

Vi vet hur man beräknar lutningen för kurvor som kan betraktas som grafer till en funktion, dvs $y = f(x)$.

Men det finns många kurvor, som t.ex. $x^2 + y^2 = 1$, som inte är grafer till funktioner. M.h.a. kedjeregeln kan man beräkna lutningen även för dessa kurvor.

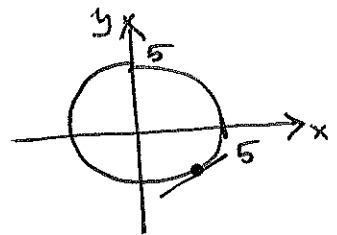
Idén är att behandla y som en funktion av x , $y = y(x)$ och derivera båda leden med avseende på (m.a.p.) x .

Detta kallas för implicit derivering.

Ex. Beräkna lutningen på cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ i punkten $(3, -4)$.

Lös.: Betrakta y som $y(x)$ och derivera båda sidor m.a.p. x :

$$x^2 + (y(x))^2 = 25 \xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow y \cdot y' = -x \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{I punkten } (3, -4): y' \Big|_{(3, -4)} = -\frac{3}{-4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Ex. Bestäm ekvationen för tangenten i punkten $(0, -1)$ till kurvan

$$x^5 - y^5 + x - y = 2$$

$$\underline{\text{Lös.}}: x^5 - (y(x))^5 + x - y(x) = 2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}}$$

$$\Rightarrow 5x^4 - 5y^4 \cdot y' + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5y^4 \cdot y' + y' = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow y'(5y^4 + 1) = 5x^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{5x^4 + 1}{5y^4 + 1} \Rightarrow y' \Big|_{(0, -1)} = \frac{1}{5 + 1} = \frac{1}{6} = k$$

Tangenten, $y = \frac{1}{6}x + m$, går genom $(0, -1)$:

$$-1 = \frac{1}{6} \cdot 0 + m \Leftrightarrow m = -1$$

$$\therefore y = \frac{1}{6}x - 1$$