# Analys 1, MVE535, vt 2019, Föreläsning 3.2

Repetition:

- Sats: I. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

  II. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ om $g(x) \neq 0$

- Sats: (Kedjeregeln) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$

- Många kurvor är inte grafer till funktioner. Dessa kan deriveras implicit (tänk $y = y(x)$ och derivera båda leden m.a.p. $x$).

Idag:

* Grundläggande trigonometri
* Derivator av trigonometriska funktioner

Grundläggande trigonometri: (Appendix D)

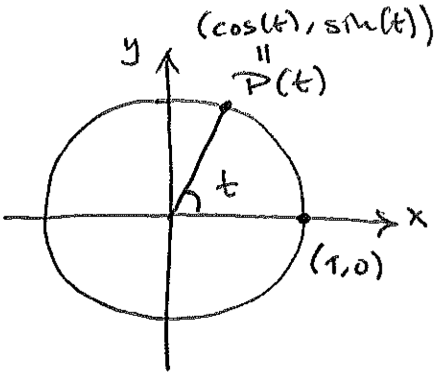
Finns två sätt att ange vinklar:

(i) grader: 1 varv $= 360°$

(ii) radianer: 1 varv = enhetscirkelns omkrets $= 2\pi$

Inom matematiken är det (nästan) uteslutande radianer som gäller!

Definition: Låt $P(t)$ vara den punkt på enhetscirkeln som svarar mot en cirkelbåge av längd $t$ mätt med $(1,0)$ som utgångspunkt. Vi definierar talen




$$\cos(t) \quad \text{och} \quad \sin(t)$$

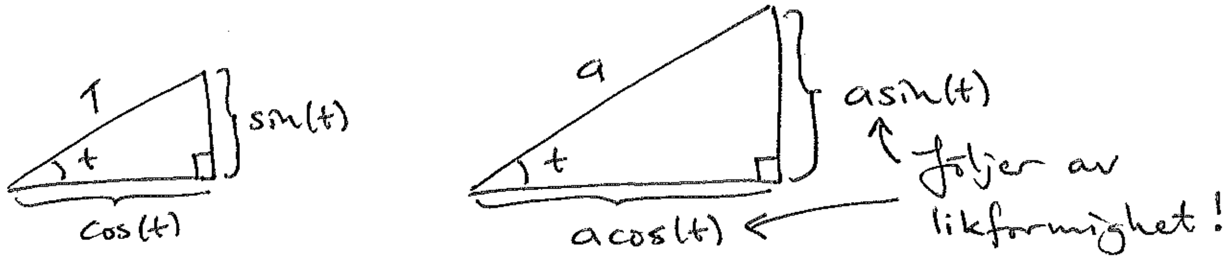
som x- resp. y-koordinaten för punkten $P(t)$.

<u>Omedelbara egenskaper:</u>

I.

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\cos(t)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\sin(t)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |

II.




Detta ger:

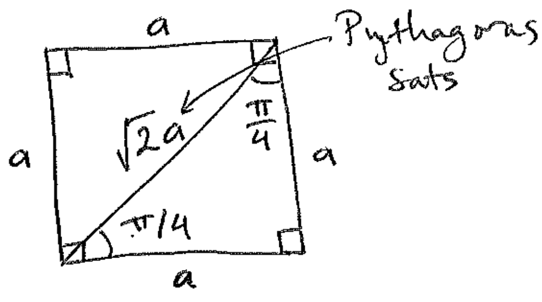
$\cos(t)$ = förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusa

$\sin(t)$ = förhållandet mellan motstående katet och hypotenusa

III. $\cos(t)$ och $\sin(t)$ är båda periodiska med perioden $2\pi$, dvs

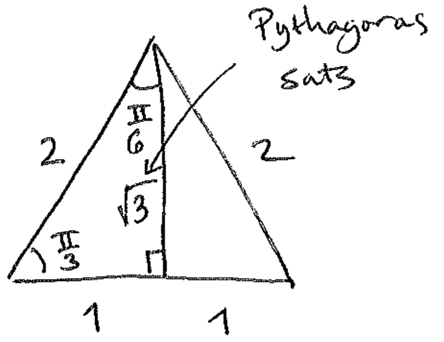
$$\begin{aligned} \cos(t+2\pi n) &= \cos(t) \\ \sin(t+2\pi n) &= \sin(t) \end{aligned} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$$

<u>Viktiga vinklar:</u> $(\pi/4,\ \pi/3,\ \pi/6)$




Ger att: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$




Ger att:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

Definition: $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ = förhållandet mellan motstående och närliggande katet

$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Användbara identiteter:

(i) $\cos(-x) = \cos(x)$ , $\sin(-x) = -\sin(x)$

(ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(iii) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$

(iv) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Lär er dessa 4 utantill!

(i)-(ii) följer direkt ur definitionen

(iii)-(iv) krångligt

Alla andra trigonometriska identiteter går att härleda med (i)-(iv).

(v) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

(vi) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ , $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(vii) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

(viii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

Ex. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos x + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\sin x = \sin x$

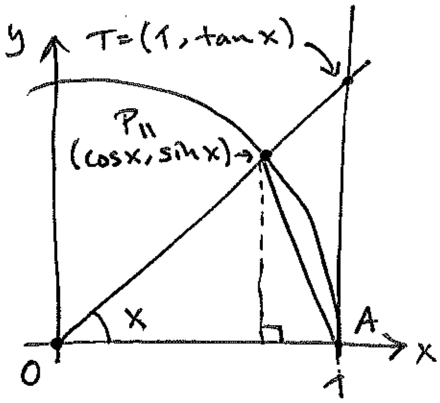
# Derivator av trigonometriska funktioner: (3.3)

Allt bygger på följande mycket centrala gränsvärde

**Sats:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ( x i radianer! )

**Bevis:** (i) Vi börjar med att visa: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Låt $0 < x < \pi/2$. Vi har följande figur:




Area triangel OAP $= \frac{1\cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$

Area cirkelsektor OAP =

$$= \frac{x}{2\pi}\cdot \underbrace{\pi\cdot 1^2}_{\text{area enhetscirkeln}} = \frac{x}{2}$$

Area triangel OAT $= \frac{1\cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Vi har att: $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\sin x < x}$ $< \frac{\sin x}{\cos x}$, $x>0 \Rightarrow \cos x > 0$:

$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{\sin x}{x} < 1$ $\qquad x < \frac{\sin x}{\cos x} \Longleftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$

$\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ $\begin{pmatrix} \text{Obs! } 2x+1 < 4x+1 \text{ då } x>0 \\ \text{Om } x\to 0^+ \text{ så } 1 \underline{\leq} 1 \end{pmatrix}$

Låt nu $x\to 0^+$:

$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \begin{Bmatrix} \text{Låt } x=-y \\ x\to 0^- \Leftrightarrow y\to 0^+ \end{Bmatrix} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} =$

$= \{\sin \text{ udda}\} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{-\sin(y)}{-y} \overset{(i)}{=} 1$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \blacksquare$$

Ex. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

Lösn.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{2}{2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = \left\{ \begin{matrix} \text{Låt } y=2x \\ x\to 0 \Rightarrow y\to 0 \end{matrix} \right\} =$

$= 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 2\cdot 1 = 2$

Ex. Beräkna $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

Lösn.: $\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \frac{2x\cdot\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(3x)\cdot 3x}{3x}} = \frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}\cdot\frac{2x}{3x}$

$\xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Hjälpsats

Lemma: $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$

Bevis: Vill uttrycka $\cos(h)$ i termer av $\sin(h)$

Vet att: $\cos(2x) = 1-2\sin^2(x) \xRightarrow{x=\frac{h}{2}} \cos(h) = 1-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)-\cancel{1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} -\frac{2\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2\cdot\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right) = -1\cdot\sin(0) = 0$ ∎

Sats: (i) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ . (ii) $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

Bevis: (i) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\left( \sin(x)\cdot \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\text{Lemma}\nearrow\ \xrightarrow[h\to 0]{} 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1}\cdot \cos(x)\right) =$$

$$= \sin(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos(x) = \cos(x)$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left\{ \text{(i)} + \text{Kedjeregeln} \right\} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin(x) \qquad \blacksquare$$

Kan nu m.h.a. kvotregeln visa att:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

<u>Obs!</u> Stewart använder beteckningen $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

så $$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$