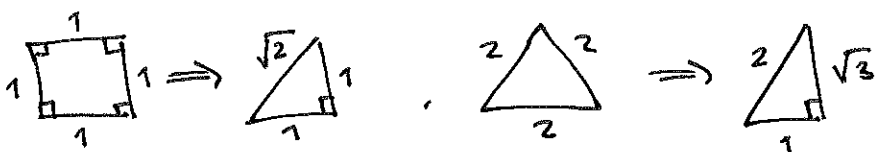


Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 4.1

Repetition:

- $\cos(t)$ och $\sin(t)$ är x- resp. y-koordinat på enhetscirkeln

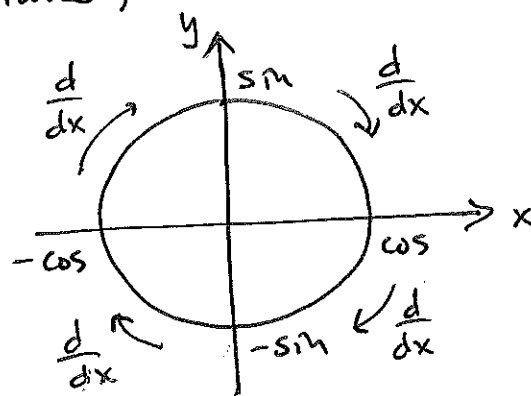
- 

- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$
 $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

- Satz: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (x i radianer)

- Lemma: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$

- Satz: (i) $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
(ii) $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$



Idag:

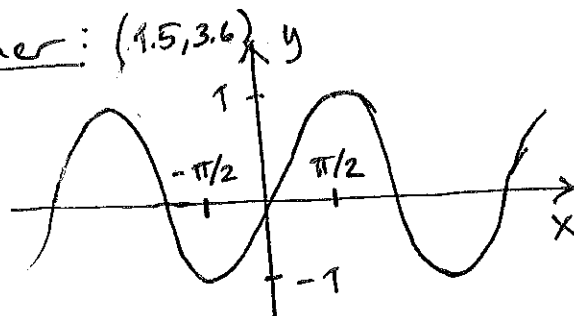
- * Inversa trig. funktioner
- * Exponentiell tillväxt

Inversa trigonometriska funktioner: (1.5, 3.6)

Vill ha invers till $f(x) = \sin(x)$

Problem: $\sin(x)$ ej injektiv!

Lösning: Begränsa definitionsmängden



$\sin(x)$ är injektiv på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(x)$ är invertierbar på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Vi ser även att $V_{\sin} = [-1, 1]$ på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Detta ger:

Definition: Vi låter $\arcsin$ beteckna inversen till $\sin$, $\arcsin = \sin^{-1}$, på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dvs

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Ex. (a) $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ (inte $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$)

(b) $\sin(\arcsin(2))$ går ej! $2 \notin [-1, 1]$

(c) $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2})) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

(d) $\tan(\arcsin(x)) = \left\{ \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{arcsin}(x) \\ \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

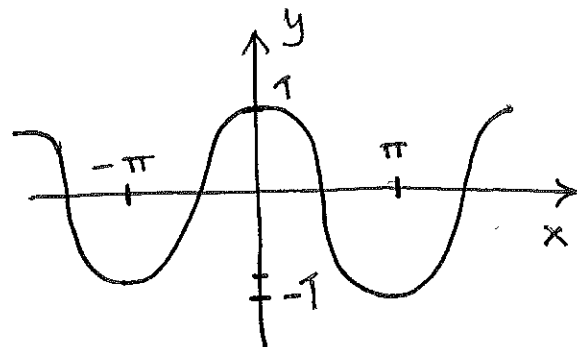
Satz: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Bevis: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \left\{ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right\} =$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \left\{ \begin{array}{c} \text{1} \\ \theta \\ \sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \square$$

Vill ha invers till $f(x) = \cos(x)$

Problem: $\cos(x)$ ej injektiv!



Lösning: (i) Begränsa $D_{\cos}$, eller

(ii) Utnyttja att $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

(ii): Antag att $\arccos(x) = \cos^{-1}(x) = y \xrightarrow{\cos}$

$$\Rightarrow \cos(\arccos(x)) = \cos(y) \Leftrightarrow x = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$$

$$\xrightarrow{\arcsin} \Rightarrow \arcsin(x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - y)) \Leftrightarrow \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\therefore \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

Av egenskaperna för $\arcsin$ följer nu att:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

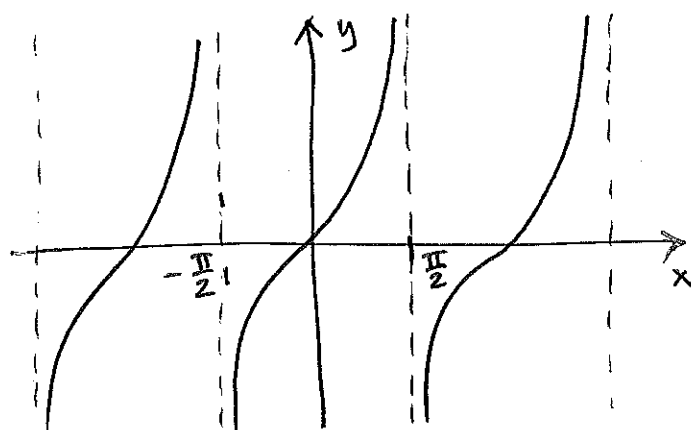
$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Slutligen vill vi även ha inversen till $f(x) = \tan(x)$

Problem: $\tan(x)$ ej injektiv!

Lösning: Begränsa $D_{\tan}$



Definition: Vi låter $\arctan$ beteckna inversen till $\tan$ på intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arctan(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \left\{ \tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Exponentiell tillväxt och avtagande: (3.8)

En vanlig tillämpning av derivator är lösandet av s.k. differentialekvationer (ODE:n). Dessa kommer vi att studera mer allmänt i nästa kurs. ^{Men} En specifik sorts ODE som vi kan studera redan nu är:

Bestäm/Hitta en funktion $y(t)$ sådan att:

$$y'(t) = ky(t) \quad (*)$$

där $k \in \mathbb{R}$ är en given konstant. För dessa gäller:

Sats: ODE:n (*) har lösningen:

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

Ex. ODE:n $\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 3 \end{cases}$

har lösningen: $y(t) = 3 \cdot e^{2t}$

Denna form av ODE dyker upp i många olika sammanhang:

I. Låt $y(t)$ = mängden av ett sönderfallande radioaktivt preparat vid tiden t .

Antag att: I. $y(0) = m$ kg

II. Mängden radioaktivt ämne som sönderfaller per tidsenhet är proportionell mot den totala mängden (kvarvarande) radioaktivt material (vid tidpunkten i fråga)

Detta kan modelleras med ODE:n

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) \\ y(0) = m \end{cases}$$

Ex. Radium-226 har en halveringstid på 1590 år.

Antag att ett labb har en prov som väger 100 mg.

(a) Bestäm en formel som beskriver vikten av radium-226 i detta prov efter t år.

(b) Vad är vikten efter 1000 år?

(c) Efter hur lång tid kommer 30 mg att återstå?

Lös.: (a) Vi har ODE:n $\begin{cases} y'(t) = -ky(t) \\ y(0) = 100 \end{cases}$

där t har enheten $\text{\AA}$ och $y(t)$ har enheten mg .

$$\Rightarrow y(t) = 100 e^{-kt}$$

$$\text{Vet att: } y(1590) = \frac{1}{2} y(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 e^{-1590k} = 50 \Leftrightarrow e^{1590k} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1590k = \ln(2) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{1590}$$

$$\therefore y(t) = 100 e^{-t \cdot \ln(2)/1590}$$

$$(b) y(1000) = 100 e^{-1000 \cdot \ln(2)/1590} \text{ mg } (\approx 65 \text{ mg})$$

$$(c) \text{ Vill hitta } t > 0 \text{ s\AA att: } y(t) = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 e^{-t \ln(2)/1590} = 30 \Leftrightarrow e^{-t \ln(2)/1590} = 0.3$$

$$\Leftrightarrow -t \cdot \ln(2) = 1590 \cdot \ln(0.3)$$

$$\therefore t = - \frac{1590 \cdot \ln(0.3)}{\ln(2)} \quad (\approx 2762 \text{ \AA})$$

II. L\AA t $T(t)$ = temperaturen hos ett objekt ^{vid tiden t} , och l\AA t T_s = omgivningens temperatur

Antag att: I. $T(0) = T_0$.

II. F\AA r\AA ndringen av temperaturen hos objektet \AA r proportionell mot temperaturdifferensen $T(t) - T_s$ (detta \AA r k\AA nt som Newtons avsv\AA lningslag)

Detta kan modelleras med ODE:n

$$\begin{cases} T'(t) = k(T(t) - T_s) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Ex. En burk läsk som befunnits i rumstemperatur (22°C) stoppas in i ett kylskåp (7°C). Efter en halvtimme är burken 16°C . Hur varm kommer den att vara efter en timme?

Lös.: Låt $T(t)$ = temperatur ($^\circ\text{C}$) av burk efter t timmar i kylen.

Vet att:
$$\begin{cases} T'(t) = k(T(t) - 7) \\ T(0) = 22 \end{cases} \quad (*)$$

Låt $y(t) = T(t) - 7$. Då $y'(t) = T'(t)$ och $y(0) = T(0) - 7 = 22 - 7 = 15$, så

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(0) = 15 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 15e^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T(t) - 7 = 15e^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 7 + 15e^{kt}$$

Vet att: $T(0.5) = 16 \Leftrightarrow 7 + 15e^{k/2} = 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{k/2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow k = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore T(t) = 7 + 15e^{2 \cdot \ln(\frac{3}{5}) \cdot t}$$

$$\Rightarrow T(1) = 7 + 15e^{2 \ln(\frac{3}{5})} \text{ } ^\circ\text{C} (\approx 12.4^\circ\text{C})$$

