Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 4.2

Repetition:

- Definition: Inverser till trigonometriska funktioner:

(i) $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(ii) $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ $\left(\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)$

(iii) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

- Sats: I. $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, II. $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

III. $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- Differentialekvationen $\begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(0) = C \end{cases}$ där $k, C \in \mathbb{R}$

har lösningen:

$$y(t) = Ce^{kt}$$

Dessa kan användas till att modellera bl.a. radioaktivt sönderfall & Newtons avkylningslag.

Idag:

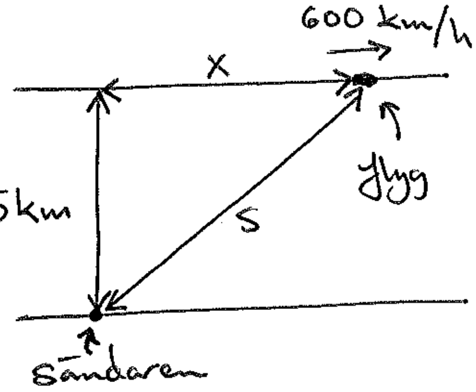
* Relaterade hastigheter
* Linjär approximation
* Extremvärden

Relaterade hastigheter: (3.9)

Avsnittet behandlar praktiska problem där flera olika, men relaterade, storheter förändras.

Ex. Ett flygplan flyger horisontellt med hastigheten 600 km/h. Hur snabbt ökar avståndet mellan planet och en radiosändare 1 min efter det att planet har passerat över sändaren på höjden 5 km?

Lösn.:



Givet: $t = 1$ min

$$v = \frac{dx}{dt} = 600 \text{ km/h}$$

Sökt: $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=1\text{ min}}$

Både x och s är funktioner av t: $x(t)$, $s(t)$

Relation mellan x och s:

$$x(t)^2 + 5^2 = s(t)^2 \quad \text{Pythagoras sats}$$

Deriverar vi implicit får vi en relation mellan $x'(t)$ och $s'(t)$:

$$\frac{d}{dt}(s(t))^2 = \frac{d}{dt}(x(t)^2 + 5^2) \Leftrightarrow 2s(t)\cdot s'(t) = 2x(t)\cdot x'(t)$$

$$\Leftrightarrow s'(t) = \frac{x(t)}{s(t)} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Vid tiden $t = 1$ min $= 1/60$ h gäller att:

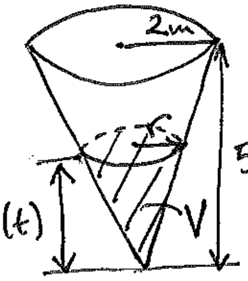
$$x\left(\frac{1}{60}\right) = \frac{1}{60}\cdot 600 = 10 \text{ km}$$

$$s\left(\frac{1}{60}\right) = \underset{(-)}{+}\sqrt{x\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5} \text{ km}$$

$$\therefore \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1\,min} = \frac{10}{5\sqrt{5}} \cdot 600 = \frac{1200}{\sqrt{5}} \text{ km/h } (\approx 536.7 \text{ km/h})$$

<u>Ex.</u> En läckande vattentank har formen av en upp och ned vänd kon med höjden 5m och toppradie 2m. Då vattennivån i tanken är 4m läcker vattnet ut med en hastighet av 1/12 m^3/min. Hur snabbt sjunker vattennivån i tanken vid den här tidpunkten?

<u>Lösn.</u>:



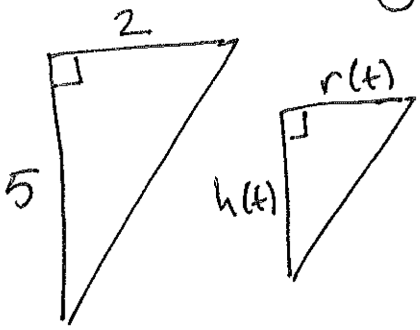
<u>Givet</u>: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=4m} = -\frac{1}{12}\ m^3/min$

<u>Sökt</u>: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4m}$

Vet att: $V = \pi r^2 h \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} r^2 h$

Både r och h är funktioner av t: $r(t), h(t)$

Finns det något samband mellan $r(t)$ och $h(t)$?



Likformighet $\Longrightarrow$ $\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r(t) = \frac{2h(t)}{5}$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2h(t)}{5}\right)^2 \cdot h(t) = \frac{4\pi}{75} h(t)^3$$

$$\Rightarrow V'(t) = \frac{3 \cdot 4\pi}{75} h(t)^2 \cdot h'(t) = \frac{4\pi}{25} h(t)^2 \cdot h'(t)$$

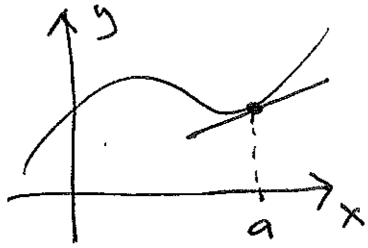
$$\Rightarrow h'(t) = \frac{25}{4\pi h(t)^2} V'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(t)\Big|_{h=4m} = \frac{25}{4\pi \cdot 4^2} V'(t)\Big|_{h=4m} =$$

$$= \frac{25}{64\pi} \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{25}{768\pi} \text{ m/min} \quad (\approx -1.036 \text{ cm/min})$$

Linjär approximation: (3.10)

För en given funktion $f(x)$ svarar $f'(a)$ geometriskt mot tangenten till f:s grafs lutning i punkten $(a, f(a))$. Detta kan användas till att beräkna approximativa funktionsvärden till "jobbiga" funktioner, genom att approximera f med dess tangent:



$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad (= L(x))$$ linjens värde i x

Detta kallas ibland för att linjärisera f kring $x=a$.

Ex. Beräkna approximativa värden på $\sqrt{3.98}$ och $\sqrt{4.05}$ genom att linjärisera $f(x) = \sqrt{x+3}$ kring $x = 1$.

Lösn.: $f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow L(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{4}(x-1) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

$$\sqrt{3.98} = f(0.98) \approx L(0.98) = \frac{0.98}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7.98}{4} = 1.995$$

$$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx L(1.05) = \frac{1.05}{4} + \frac{7}{4} = \frac{8.05}{4} = 2.0125$$

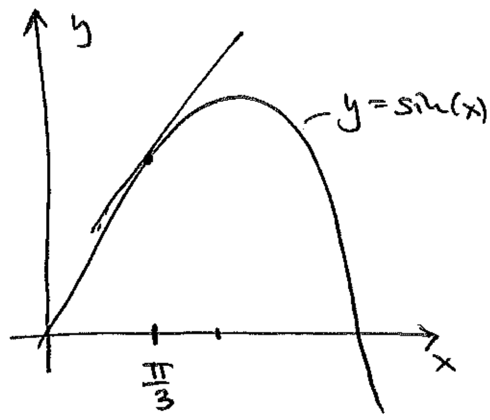
Ett annat sätt att göra linjära approximationer på är genom att tänka att om $y = f(x)$. så

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Ex. Beräkna ett approximativt värde på $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 0.006\right)$

Lösn.: Låt $y = \sin(x)$. Då

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \cos(x)$$



Om vi tänker $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ får vi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \cos(x) \Leftrightarrow \Delta y \approx \cos(x) \cdot \Delta x$$

Vi har: $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{3} + 0.006 - \frac{\pi}{3} = 0.006$

$$\Rightarrow \Delta y \approx \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 0.006 = \frac{1}{2} \cdot 0.006 = 0.003$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{\pi}{3} + 0.006\right) \approx y\left(\frac{\pi}{3}\right) + \Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 0.003 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.003.$$

Detta sätt att resonera, dvs tänka på $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ som $dy = f'(x)dx$, kallas för att använda <u>differentialer</u>.

<u>Extremvärden</u>: (4.1)

Definition: Låt f vara en funktion och $c \in D_f$

(a) c global max. pkt. (eng.: absolute max.) om
$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D_f$

(b) c lokal max. pkt. (eng.: local max.) om $\exists h > 0$ s.a. (sådan att)
$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in D_f$ där $|x-c| < h$ ← alla $x \in D_f$ nära c

(c) c global min. pkt. (eng.: absolute min.) om $f(x) \geq f(c)$
$\forall x \in D_f$.

(d) c local min. pkt. (eng.: local min.) om $\exists h > 0$ s.a.
$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in D_f$ där $|x-c| < h$.

(e) Motsvarande funktionsvärde, $f(c)$, kallas för ett globalt/lokalt max./min. värde

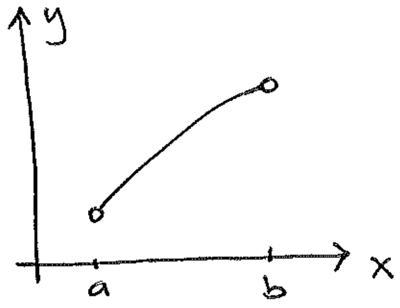
(f) Globala/Lokala max./min. punkter/värden kallas med ett gemensamt ord för extrempunkter resp. extremvärden.

Obs! Varje globalt max./min. är också ett lokalt max./min. men inte det omvända.

Följande sats är central för att veta om/när det finns extrempunkter.

Sats: Om f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.

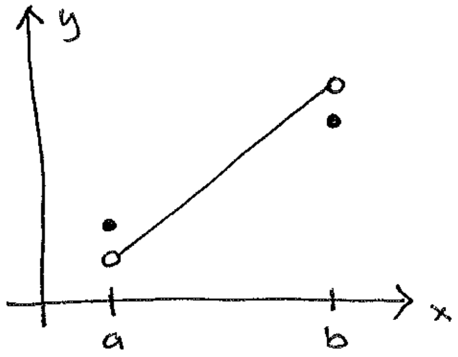
Ex.



f kontinuerlig, (a, b)

inget max./min.

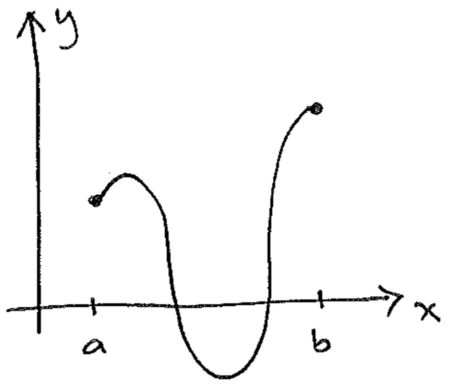
Ex.



f ej kontinuerlig, $[a, b]$

inget max./min.

Ex.



f kontinuerlig, $[a, b]$

max./min. existerar!