Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 4.3

Repetition:

- Relaterade hastigheter
- Linjär approximation
- Globala/Lokala extrempunkter/extremvärden
- Sats: f def. och kont. på $[a, b]$ $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ f antar (globalt) max. och min. på $[a, b]$.

Idag:

* Extremvärden (forts.)
* Medelvärdessatsen

Extremvärden: (4.1)

Vi har definierat globala/lokala extrempunkter/-värden och även hittat ett kriterium för när vi kan vara säkra på att max. och min. existerar. Men vi har ännu inte sagt något om hur vi kan beräkna dem.

För detta behöver vi följande:

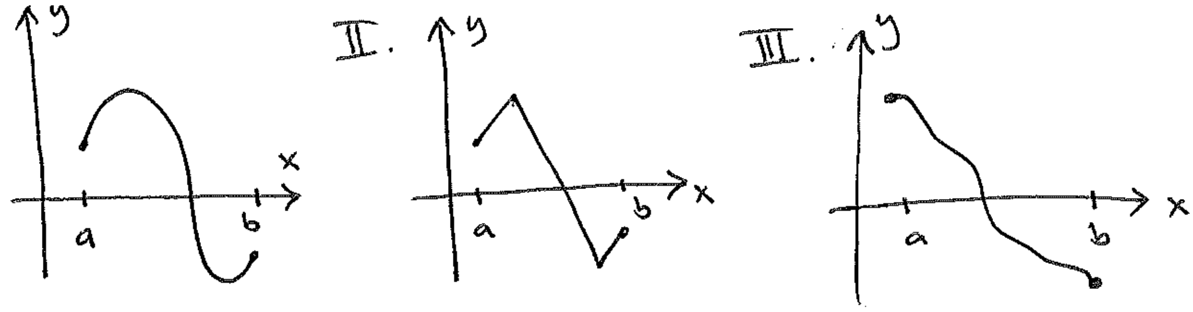
Sats: Om $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ har ett lokalt extremvärde i c så är c en av följande:

I. Kritisk punkt, dvs $f'(c) = 0$

II. Singulär punkt, dvs $f'(c)$ existerar ej

III. Ändpunkt till intervallet, dvs $c = a$ eller $c = b$

Ex. I. II. III.



Ex. Har funktionen $f(x)=|x-1|$ några extremvärden på intervallet $[-2,2]$? Vilka i så fall?

Lösn.: $f(x)=|x-1|$ kontinuerlig $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$

$[-2,2]$ slutet och begränsat intervall

$\Rightarrow$ f antar ett max. och ett min. på $[-2,2]$

Bocka av I–III.

I: $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-1|=0 \Leftrightarrow x=1$

$x\in[-2,1)$: $x-1<0 \Rightarrow f(x)=-(x-1)=1-x$

$\Rightarrow f'(x)=-1 \Rightarrow$ Inga kritiska punkter på $[-2,1)$

$x\in[1,2]$: $x-1\geq 0 \Rightarrow f(x)=x-1 \Rightarrow f'(x)=1$

$\Rightarrow$ Inga kritiska punkter på $[1,2]$

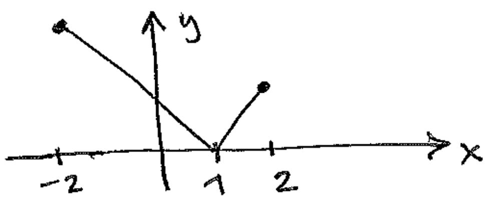
II: $x=1$ singulär punkt, $f(1)=|1-1|=0$

III: $x=-2$, $x=2$ ändpunkter (randpunkter)

$f(-2)=|-2-1|=|-3|=3$, $f(2)=|2-1|=1$

$\therefore$ $(-2,3)$ globalt max., $(1,0)$ globalt min.

$(2,1)$ lokalt max.



I föregående ex. kunde vi slå fast att $(2,1)$ är ett lokalt max. (och inte min.) bara genom att rita upp grafen. För att kunna hitta mer allmänna metoder för detta måste vi få en djupare förståelse av f' och f''. Ett viktigt verktyg för detta är:

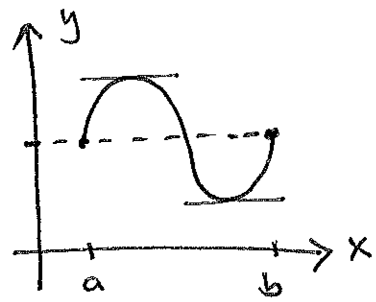
MVS

Medelvärdessatsen: (4.2)

MVS är ett ytterst viktigt teoretiskt verktyg vid studiet av deriverbara funktioner.

Vi börjar med ett specialfall som har ett eget namn.

Rolles sats: Låt g vara en fkn. och antag:



1. g kont. och def. på $[a,b]$
2. g deriverbar på (a,b)
3. $g(a) = g(b)$

xi (grekiskt x)

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)\ ;\ g'(\xi) = 0$$

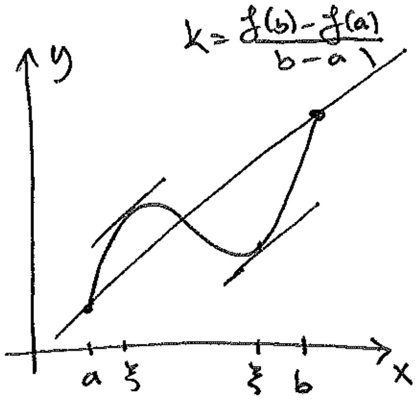
Bevis: g kont. och def. på $[a,b] \Rightarrow g$ antar ett max. och ett min. på $[a,b]$. Två alternativ: ($g'(x)$ singulär ej möjligt)

(i) Både max. och min. antas i a och b $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g(x) = \text{konstant} \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

(ii) Max. eller min. antas i någon punkt $\xi \in (a,b)$

$$\Rightarrow g'(\xi) = 0 \quad \blacksquare$$



Medelvärdessatsen: Låt f vara en funktion och antag att:

1. f kont. och def. på $[a, b]$
2. f deriverbar på (a, b)

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \; ; \; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bevis: Den räta linjen genom $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ har ekvationen

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \qquad \begin{pmatrix} x=a \Rightarrow y = f(a) \\ x=b \Rightarrow y=f(b) \end{pmatrix}$$

Låt nu:

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

Då gäller att:

1. g kont. och def. på $[a, b]$
2. g deriverbar på (a, b)
3. $\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - 0 - f(a) = 0 \\ g(b) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(a) = g(b)$

Rolles sats $\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) \; ; \; g'(\xi) = 0$

Vi har att: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

så $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$$\therefore \exists \xi \in (a,b) \; ; \; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare$$

Tillämpningar av MVS:

Korollarium 1 (Följdsats): Låt f vara en funktion och antag att

I. f kont. och def. på $[a,b]$

II. f deriverbar på (a,b)

III. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \text{konstant} \quad \forall x \in [a,b].$$

Den främsta tillämpningen av MVS för oss sker i samband med:

<u>Växande och avtagande funktioner</u>: (4.3)

<u>Definition</u>: Låt f vara en funktion definierad på $[a,b]$

(a) Om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ säger vi att f är <u>växande</u> på $[a,b]$.

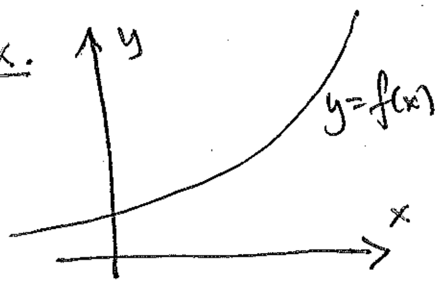
På motsvarande sätt gäller att:

(b) $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]) \Leftrightarrow f$ <u>avtagande</u> på $[a,b]$

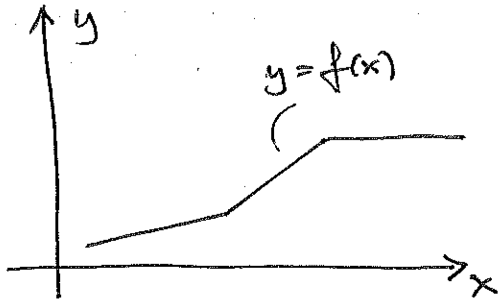
(c) $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]) \Leftrightarrow f$ <u>strängt</u> <u>växande</u> på $[a,b]$

(d) $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]) \Leftrightarrow f$ <u>strängt</u> <u>avtagande</u> på $[a,b]$

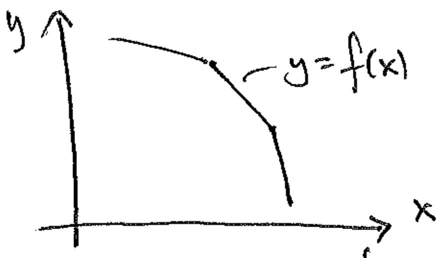
<u>Ex.</u>



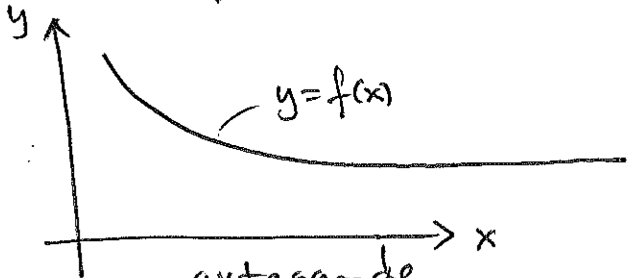
strängt växande



växande



strängt avtagande



avtagande

Korollarium 2: Låt f vara en funktion och antag att

I. f definierad och kontinuerlig på $[a,b]$.

II. f deriverbar på (a,b)

Då gäller att:

(a) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ växande på $[a,b]$

(b) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ avtagande på $[a,b]$

(c) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strängt växande på $[a,b]$

(d) $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strängt avtagande på $[a,b]$

Bevis av (a): Låt $x_1, x_2 \in [a,b]$ där $x_1 < x_2$

Vet att: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Vill visa: $f(x_1) \leq f(x_2)$

f kont. och def. på $[x_1, x_2]$

f deriverbar i (x_1, x_2)

$$\text{MVS} \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) \ ; \ \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \geq 0 \iff f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$\therefore f(x_1) \leq f(x_2) \quad \blacksquare$$

(b)-(d) bevisas precis likadant!