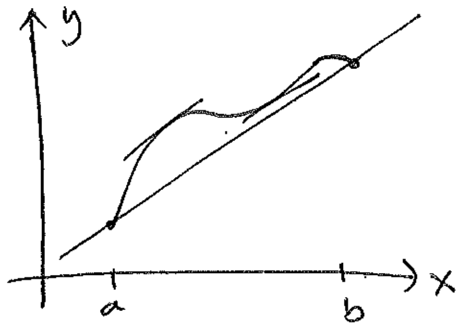
Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 5.1

Repetition:

- Sats: Om c extrempkt. till $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ så c en av:
  I. kritisk punkt, $f'(c)=0$
  II. singulär punkt, $f'(c) \nexists$
  III. randpunkt, $c=a$ eller $c=b$

- Medelvärdessatsen: f fkn. s.a.
  I. f kont. & def. på $[a,b]$
  II. f deriverbar på (a,b)
  $$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b);\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



- Korollarium 1: f fkn. s.a.
  $$\left.\begin{array}{l} \text{I. } f \text{ kont. \& def. på } [a,b] \\ \text{II. } f \text{ deriverbar på } (a,b) \\ \text{III. } f'(c)=0 \quad \forall c \in (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \text{konstant}$$

- Definition: f fkn. def. på $[a,b]$
  (a) $\big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in [a,b]\big) \Leftrightarrow f$ <u>växande</u> på $[a,b]$
  (b)–(d) avtagande, strängt växande, strängt avtagande

- Korollarium 2: f fkn. s.a.
  I. f kont. & def. på $[a,b]$
  II. f deriverbar på (a,b)
  (a) Om $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$ så f växande på $[a,b]$
  (b)–(d) $f'(x) \leq 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

Idag:

* Konvexitet och konkavitet

* l'Hospitals regel

Konvexitet och konkavitet: (4.3)

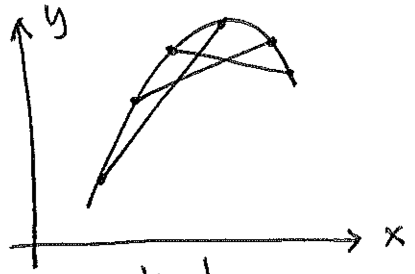
Definition: Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[a,b]$

1. Vi säger att f är konvex (eng.: convex, Stewart: concave upward) på $[a,b]$ om det $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger ovanför eller på grafen till f.

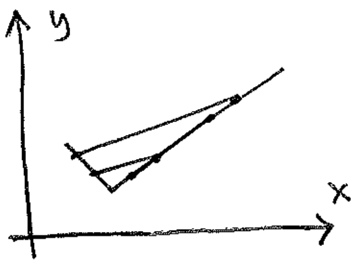
2. Vi säger att f är konkav (eng.: concave, Stewart: concave downward) på $[a,b]$ om det $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ gäller att den räta linjen mellan $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger under eller på grafen till f.

Ex.

konvex



konkav



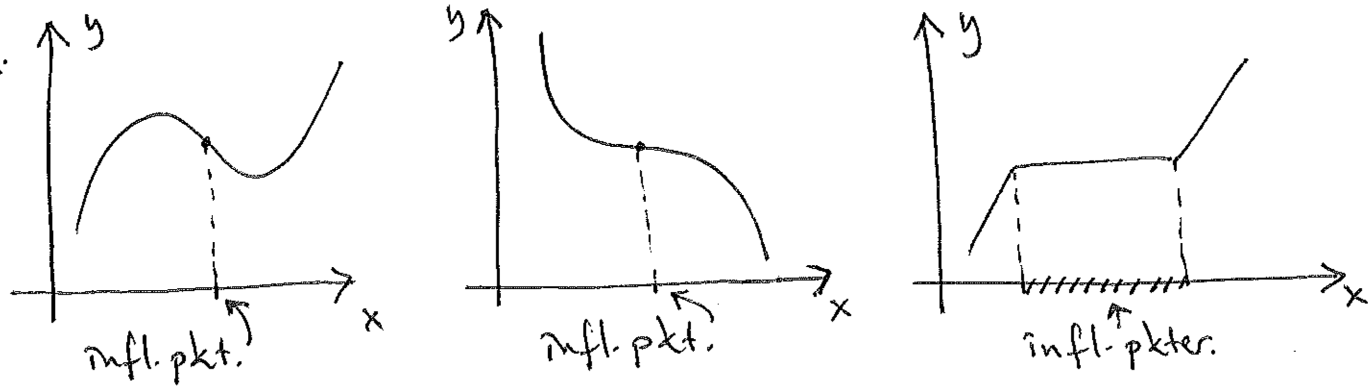
konvex

konkav

Ex. En rät linje är både konvex och konkav

Definition: Om $c \in D_f$ är s.a. f är konvex på ena sidan om c och konkav på andra sidan, säger vi att c är en inflektionspunkt.

Ex.



Ex. Alla punkter på en rät linje är inflektionspunkter

Sats: Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b).
Då gäller att:

(i) Om $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ så är f konvex på (a,b)

(ii) Om $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$ så är f konkav på (a,b)

(iii) Om $c \in (a,b)$ är en infl. pkt., så är $f''(c) = 0$

($f''(x) > 0$ och $f''(x) < 0$ i Stewart)

Ex. Avgör på vilka intervall är funktionen $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$ är konvex eller konkav och bestäm ev. inflektionspunkter

Lösn.: Beräkna f''

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+3)^2 - (3-x^2) \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \{\text{Bryt ut !!}\} =$$

$$= \frac{-2x(\cancel{x^2+3})\left(x^2+3+2(3-x^2)\right)}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x(9-x^2)}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3} = \frac{2x(x-3)(x+3)}{\underbrace{(x^2+3)^3}_{>0\ \forall x}}$$

Teckentabell!

		-3		0		3	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore$ f konvex $\forall x \in [-3,0] \cup [3,\infty)$ (Stewart: $(-3,0) \cup (3,\infty)$)

f konkav $\forall x \in (-\infty,-3] \cup [0,3]$ (Stewart: $(-\infty,-3) \cup (0,3)$)

$x=-3$, $x=0$ och $x=3$ inflektionspunkter

<u>Sats</u>: (Andraderivatatestet) Antag att f är två gånger deriverbar på (a,b) och att $c \in (a,b)$.

I. Om $f'(c)=0$ och $f''(c)<0$ så är c ett lokalt max.

II. Om $f'(c)=0$ och $f''(c)>0$ så är c ett lokalt min.

III. Om $f'(c)=f''(c)=0$ så kan ingen slutsats dras. c kan vara ett lokalt max., ett lokalt min., eller en inflektionspunkt.

<u>Ex.</u> $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$

$\Rightarrow f'(0)=f''(0)=0$ men $x=0$ lokalt min.

<u>l'Hospitals regel</u>: (4.4)

Det finns två huvudvarianter:

Sats: (l'Hospitals regel nr. 1) Antag att:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ ($x\to a$ kan bytas mot, $x\to a^+$, $x\to a^-$)

(ii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ ← a, L kan bytas mot $\pm\infty$

Då gäller att:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$

Lösn.: $\lim_{x\to 1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} x^2-1 = 0$ så (i) ok!

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{\frac{1}{1}}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{l'Hospital} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Obs! Viktigt att (i) är uppfyllt!

Ex. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^3} = \frac{0}{1^3} = 0$ men

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{\frac{1}{1}}{3\cdot 1^2} = \frac{1}{3}$$

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\cos(x)}{x^4}$

Lösn.: $$\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\cos(x)}{x^4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2x+2\sin(x)}{4x^3} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2+2\cos(x)}{12x^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)}{24x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)}{24} = -\frac{1}{12}$$

__Sats:__ (l'Hospitals regel nr. 2) Antag att

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ $\quad \left(\begin{array}{l} x\to\infty \text{ kan bytas mot} \\ x\to a,\ x\to a^+/a^-,\ x\to-\infty \end{array} \right)$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

Då gäller att: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

__Ex.__ Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

__Lösn:__ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

l'Hospital nr. 1 & 2 behandlar gränsvärden av formen:

$\left[\frac{0}{0}\right]$ och $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Andra obestämda uttryck i gränsvärden:

$[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$

Dessa går ibland att göra om till formen $\left[\frac{0}{0}\right]$ eller $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

__Ex.__ Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} \right)$

__Lösn.:__ $\lim_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} \right)^{[\infty-\infty]} = \lim_{x\to0^+} \dfrac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$= \lim_{x\to0^+} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x\cos(x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to0^+} \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = 0$