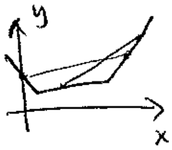
Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 6.1

Repetition:

- Definition: f konvex om , konkav om 

- Definition: Om f konvex på ena sidan $c \in D_f$ och konkav på andra sidan så c inflektionspunkt.

- Sats: (i) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ konvex på (a,b)

  (ii) $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ konkav på (a,b)

  (iii) $c \in (a,b)$ inflektionspunkt $\Rightarrow f''(c) = 0$

- Sats: (Andraderivatatestet)

- Sats: (l'Hospitals regel) Antag att

  (i) $\lim\limits_{x \to ()} f(x) = \lim\limits_{x \to ()} g(x) = [\,]$

  (ii) $\lim\limits_{x \to ()} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \{\}$

  Då gäller att: $\lim\limits_{x \to ()} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to ()} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \{\}$

  Här är: $() = a, a^-, a^+, \infty$ eller $-\infty$ $(a \in \mathbb{R})$

  $[\,] = 0, \infty$ eller $-\infty$

  $\{\} = L, \infty$ eller $-\infty$ $(L \in \mathbb{R})$

- Obestämda uttryck:

  $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [\infty^0], \cancel{0^\infty}, [1^\infty], [0^0]$

Idag:

* l'Hospital (forts.)

* Kurvkonstruktion

l'Hospitals regel: (4.4)

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leftarrow [\infty\cdot 0]$

Lösn.: $\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

För $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$ börjar man med att först ta ln innan man beräknar gränsvärdet

Ex. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x \leftarrow [1^\infty]$

Lösn.: Låt $y=\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln(y) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right) \leftarrow [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} \leftarrow \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)}\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{3\cdot 1}{1+0} = 3$$

$\ln(y)\to 3$ då $x\to\infty \Rightarrow y\to e^3$ då $x\to\infty$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right)^x = e^3$$

Kurvkonstruktion: (4.5)

Vi har nu nästan alla verktyg som behövs för att

Få en kvalitativ grafisk bild av hur en funktion uppför sig. Det enda vi saknar är:

Asymptoter - Räta linjer som f kommer oändligt nära

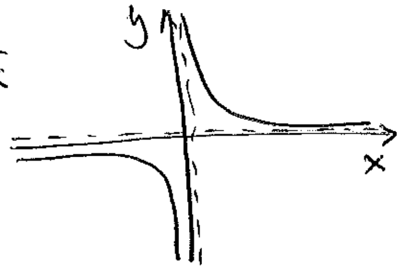
Det finns tre varianter:

I. Lodrät asymptot: f funktion, $a \notin D_f$

Om $f \to \infty / -\infty$ då $x \to a / a^+ / a^-$ så $x = a$ en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$

II. Vågrät asymptot: Om $f(x) \to L$, $L \in \mathbb{R}$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ så är $y = L$ en vågrät asymptot till $y = f(x)$

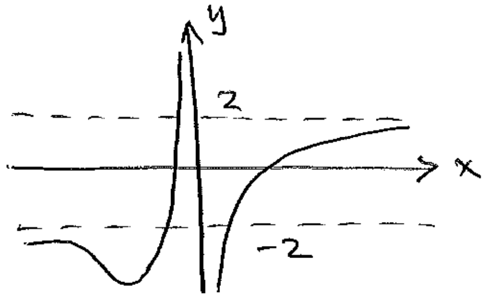
Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$



$x = 0$ lodrät asymptot

$y = 0$ vågrät asymptot

Ex.

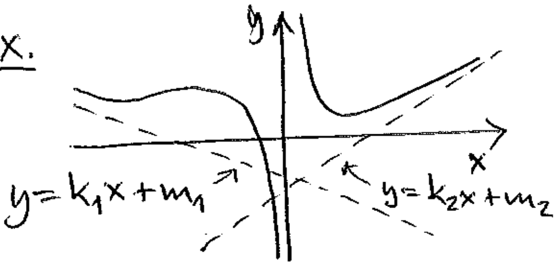


$y = 2$, $y = -2$ vågräta asymp.

$x = 0$ lodrät asymptot

III. Sneda asymptoter: $y = kx + m$ sned asymptot om $f(x) - (kx + m) \to 0$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

Ex.



$y = k_1x + m_1$ och $y = k_2x + m_2$ sneda asymptoter

För att rita grafen till en funktion följer man ett standardrecept som vi illustrerar med ett (ganska svårt) exempel.

Ex. Rita grafen till $f(x) = \dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$

Lösn.: **Steg 1:** Ta fram D_f

I vårt fall: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Steg 2: Beräkna alla asymptoter

I vårt fall:

I. **Lodräta:**

$f(x) \to \infty$ då $x \to 1^+$ och $x \to 1^-$ $\left(\text{"}\dfrac{1}{0^+}\text{"}\right)$

$f(x) \to -\infty$ då $x \to -1^+$ och $x \to -1^-$ $\left(\text{"}\dfrac{-1}{0^+}\text{"}\right)$

$\Rightarrow$ $x = 1$, $x = -1$ lodräta asymptoter

II. **Vågräta:**

$$f(x) = \frac{x^5}{\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2} = \frac{x^5}{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} \xrightarrow[x\to\infty/-\infty]{} \infty/-\infty$$

$\Rightarrow$ Inga vågräta asymptoter

III. **Sneda:** Om "$f(x) \approx kx+m$ då $x \to \infty/-\infty$" så måste $k = \lim\limits_{x\to\infty/-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

I vårt fall: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x^5}{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2} \xrightarrow[x\to\infty/-\infty]{} 1$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 1$

Om "$f(x) \approx kx+m$ då $x \to \infty/-\infty$" så måste

$$m = \lim_{x\to\infty/-\infty} \left(f(x) - kx\right)$$

I vårt fall: $f(x) - 1 \cdot x = \dfrac{x^5}{x^4-2x^2+1} - x \cdot \dfrac{x^4-2x^2+1}{x^4-2x^2+1} =$

$$= \frac{x^5 - x(x^4-2x^2+1)}{x^4-2x^2+1} = \frac{2x^3 - x}{x^4-2x^2+1} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow m_1 = m_2 = 0$$

$\therefore$ $y = x$ sned asymptot

Steg 3: Beräkna f' och ev. kritiska punkter

I vårt fall:

$$f'(x) = \frac{5x^4 \cdot (x^2-1)^2 - x^5 \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \{\text{bryt ut!!}\} =$$

$$= \frac{x^4\cancel{(x^2-1)}(5(x^2-1) - 4x^2)}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^4(x^2-5)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{x^4(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{(x^2-1)^3} \left(= \frac{x^6 - 5x^4}{(x^2-1)^3} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$$

Steg 4: Beräkna f'' och ev. inflektionspunkter

I vårt fall: $f''(x) = \dfrac{(6x^5 - 20x^3)(x^2-1)^3 - (x^6-5x^4)3(x^2-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^6} =$

$$= \frac{2x^3(3x^2-10)(x^2-1)^3 - 6x^5(x^2-5)(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6} =$$

$$= \frac{2x^3\cancel{(x^2-1)^2}((3x^2-10)(x^2-1) - 3x^2(x^2-5))}{(x^2-1)^{\cancel{6}4}} =$$

$$= \frac{2x^3(\cancel{3x^4} - 3x^2 - 10x^2 + 10 - \cancel{3x^4} + \cancel{3}15x^2)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3(2x^2+10)}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^3\overbrace{(x^2+5)}^{>0}}{\underbrace{(x^2-1)^4}_{>0}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Steg 5: Gör en tabell med f, f', f'' vs. $\pm\infty$, de odefinierade-, kritiska-, och ev. infl. punkterna

I vårt fall:

	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1^-	-1^+		0		1^-	1^+		$\sqrt{5}$		∞
f'		$+$	0	$-$			$+$	0	$+$			$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$			$-$	0	$+$			$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ $\cap$	$\frac{-25\sqrt{5}}{16}$	$\searrow$ $\cap$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ $\cap$	0	$\nearrow$ $\cup$	∞	∞	$\searrow$ $\cup$	$\frac{25\sqrt{5}}{16}$	$\nearrow$ $\cup$	∞
			lok. max.					infl. pkt.					lok. min.		

Steg 6: Rita ut skiten!