# Analys 1, MVE535, vt2019, Föreläsning 6.2

Repetition:

- För $[\infty^0]$, ~~...~~, $[1^\infty]$, $[0^0]$ ta ln först, därefter l'Hospital, och slutligen "e-upphöjt till".

- Det finns 3 sorters asymptoter:

  (i) Lodräta: $f(x) \to \infty / -\infty$ då $x \to a / a^- / a^+$, $a \notin D_f$

  (ii) Vågräta: $f(x) \to L$, $L \in \mathbb{R}$ då $x \to \infty / -\infty$

  (iii) Sneda: $f(x) - (kx+m) \to 0$ då $x \to \infty / -\infty$

- För att rita grafen till en funktion $f(x)$ följer man följande recept:

  Steg 1: Ta fram $D_f$

  Steg 2: Beräkna alla asymptoter

  Steg 3: $f'(x)$ och ev. kritiska punkter

  Steg 4: $f''(x)$ och ev. infl. punkter

  Steg 5: Tabell

  Steg 6: Rita

Idag:

* Optimeringsproblem

Optimeringsproblem: (4.7)

Derivator av mycket användbara för att lösa diverse optimeringsproblem. Lösningsgången för (modellerings-delen av) många av dessa problem är ganska likartad och består oftast av följande steg:

(Steg 0: Läs igenom uppgiften noggrant)

Steg 1: Rita en figur (om möjligt)

Steg 2: Sätt ut variabler och annan given info

Steg 3: Definiera den funktion $f$ som ska optimeras utifrån dessa variabler (kan bero av mer än en).

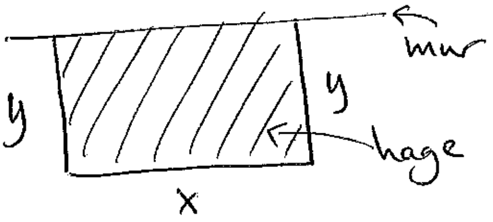
Steg 4: Om $f$ beror av $n$ variabler, hitta $n-1$ samband mellan variablerna.

Steg 5: Använd sambanden i steg 4 till att uttrycka $f$ som en funktion av 1 variabel (dvs $f = f(x)$)

Steg 6: Optimera $f(x)$ m.h.a. kritiska-, rand- och singulära punkter ...

Ex. En rektangulär hage ska byggas i anslutning till en lång rak mur, med ett 100 m långt staket (dvs muren utgör ena sidan av hagen). Vilken är den största möjliga arean för hagen?

Lösn.:




Vill hitta max av arean: $A = xy$

Villkor: $x + 2y = 100 \iff x = 100 - 2y$

$$\Rightarrow A = A(y) = (100-2y)\cdot y = 100y - 2y^2$$

Vill alltså optimera (maximera) $A(y) = 100y - 2y^2$ med $D_A = [0, 50]$

$A'(y) = 100 - 4y$ ← singulära punkter saknas!

Kritiska punkter:

$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 100 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = 25$ m

$A''(y) = -4 < 0 \Rightarrow y = 25$ m max. punkt

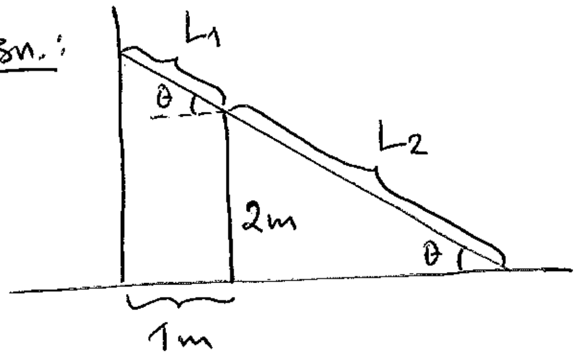
Randpunkter:

$A(0) = 0$ , $A(50) = 5000 - 2 \cdot 2500 = 0$

$\therefore$ Maximal area: $A(25) = 2500 - 1250 = \underline{\underline{1250 \text{ m}^2}}$

Ex. Ett 2m högt staket löper parallellt med ett höghus på 1m avstånd från huset. Hur lång är den kortaste stege som når husväggen från marken och över staketet?

Lösn.:




$\sin\theta = \frac{2}{L_2} \Leftrightarrow L_2 = \frac{2}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{L_1} \Leftrightarrow L_1 = \frac{1}{\cos\theta}$

Vill optimera (minimera)

$$L(\theta) = L_1 + L_2 = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\sin\theta} = (\cos\theta)^{-1} + 2(\sin\theta)^{-1}$$

med $D_L = (0, \frac{\pi}{2})$.

$$L'(\theta) = -\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot (-\sin\theta) - \frac{2}{\sin^2\theta} \cdot \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Singulära- och randpunkter saknas

<u>Kritiska punkter:</u>

$$L'(\theta)=0 \iff \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} \iff \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}=2 \iff$$

$$\iff \tan^3\theta = 2 \iff \tan\theta = 2^{1/3}$$

$$\therefore \ \theta = \arctan(2^{1/3})$$

Andraderivata/teckentabell? Nej! $L'(\theta)=0$ har endast en rot på $D_L=(0,\frac{\pi}{2})$. Därför räcker det att kolla

$$\lim_{\theta\to 0^+} L(\theta) \quad \text{och} \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} L(\theta)$$

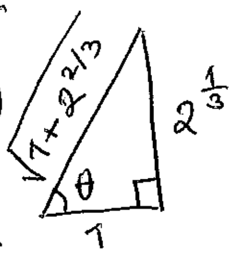
för att avgöra max./min.

$$\lim_{\theta\to 0^+} L(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\right)=\infty$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} L(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{2}{\sin\theta}\right)=\infty$$

$$\therefore \ \theta = \arctan(2^{1/3}) \text{ global min.punkt}$$

$$L(\arctan(2^{1/3})) = \frac{1}{\cos(\arctan(2^{1/3}))}+\frac{2}{\sin(\arctan(2^{1/3}))}=$$

$= \Big\{$ 

$\Big\}$ $= \dfrac{1}{\dfrac{1}{(1+2^{2/3})^{1/2}}} + \dfrac{2}{\dfrac{2^{1/3}}{(1+2^{2/3})^{1/2}}} =$

$$=(1+2^{2/3})^{1/2}+\frac{2\cdot(1+2^{2/3})^{1/2}}{2^{1/3}}=$$

$$= (1+2^{2/3})^{1/2} + 2^{2/3}(1+2^{2/3})^{1/2} =$$

$$= (1+2^{2/3})^{1/2}(1+2^{2/3}) = (1+2^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{m} \quad (\approx 4.16\,\mathrm{m})$$

Ej alltid möjligt att rita figur

<u>Ex.</u> En biltillverkare säljer 2000 bilar varje månad med en genomsnittlig vinst på 1000 \$ per bil. Marknadsundersökningar visar att för varje avdrag på 50 \$ som tillverkaren erbjuder sina kunder, ökar antalet sålda bilar med i genomsnitt 200 bilar per månad. Hur mycket avdrag bör man erbjuda för att maximera vinsten?

<u>Lösn.</u>: Låt $x$ = antal avdrag à 50 \$

Då $x = 0$ gäller att:

Antal sålda bilar = 2000

Genomsnittlig vinst per såld bil = 1000 \$

$\Rightarrow$ Vinst: $V = 2000 \cdot 1000 = 2 \cdot 10^6$ \$

Då $x \neq 0$ ($x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$) gäller att:

Antal sålda bilar = $2000 + 200x$

Genomsnittlig vinst per såld bil = $1000 - 50x$ \$

$\Rightarrow$ Vinst: $V(x) = (2000 + 200x)(1000 - 50x)$

Vill alltså maximera $V(x) = 200 \cdot 50(10+x)(20-x)$
med $D_V = \mathbb{N}$

$V(x) = 10^4(200 - 10x + 20x - x^2) = 2 \cdot 10^6 + 10^5 x - 10^4 x^2$

$\Rightarrow V'(x) = 10^5 - 2 \cdot 10^4 x$ ← Inga singulära punkter

Kritiska punkter:

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 10^4 x = 10^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{10^5}{2 \cdot 10^4} = 5$

$V''(x) = -2 \cdot 10^4 < 0 \Rightarrow x = 5$ max. punkt

Randpunkter:

Vet att: $V(0) = 2 \cdot 10^6$ \$

$\lim_{x \to \infty} V(x) = \lim_{x \to \infty} (2 \cdot 10^6 + 10^5 x - 10^4 x^2) = -\infty$

$V(5) = 2 \cdot 10^6 + \overbrace{50 \cdot 10^4 - 25 \cdot 10^4}^{>0} > 2 \cdot 10^6 = V(0)$

$\therefore$ Optimalt avdrag: $5 \cdot 50$ \$ $= 250$ \$